Untersuchung des quantenmechanischen 3-Teilchen-Problems für Teilchen mit Spin

der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen - Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Hartmut Hofmann
aus Nürnberg

1969

Untersuchung des quantenmechanischen 3-Teilchen-Problems für Teilchen mit Spin

der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen - Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Hartmut Hofmann
aus Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Erlangen - Nürnberg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 26. November 1969

Dekan: Univ. Prof. Dr. F. Tichy

1. Berichterstatter: Univ. Prof. Dr. M. G. Huber

2. Berichterstatter: Priv. Doz. Dr. D. Fick

Untersuchung des quantenmechanischen 3-Teilchen-Problems für Teilchen mit Spin

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

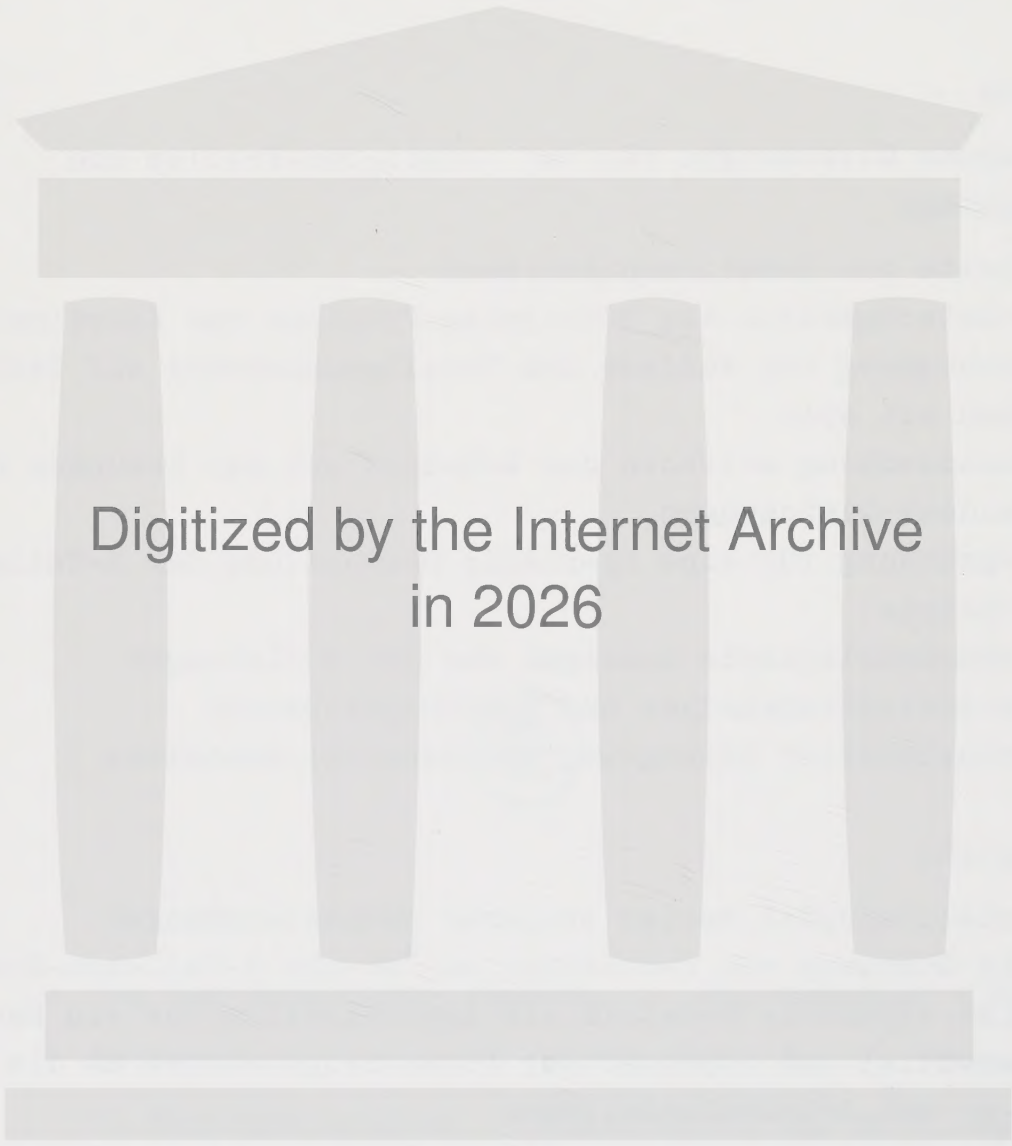
I. Allgemeine Gleichungen für das 3-Teilchen-Problem und Lösungswege

2.) Abriss des 2-Teilchen-Problems
3.) Schwierigkeiten des 3-Teilchen-Problems und Koordinaten
4.) Lösungsweg von Faddeev und Verallgemeinerung auf Teilchen mit Spin
5.) Zusammenhang zwischen der S-Matrix und der Lösungen der Faddeev-Gleichungen
6.) Begründung für eine spezielle Darstellung der 2-Teilchen-T-Matrix
7.) Phänomenologische Aussagen aus den Gleichungen
8.) Partialwellenanalyse und Kopplungsschemata
9.) Prinzipieller Lösungsweg und Separationsansätze

II. Beispiele

10.) Modellbeispiel zweier skalarer Wechselwirkungen
11.) Die Streuung von Deuteronen an ^{4}He als 3-Teilchen-Problem
12.) Eine separable T-Matrix als Approximation für ein Kastenpotential und Anpassen der Potentialparameter an die n-p- und n-α-Wechselwirkung
13.) Behandlung des Deuteron-Helium-Systems mit der T-Matrix
14.) Zwei Lösungsansätze für das Deuteron-Helium-System
15.) K-Matrix-Approximation der Sandhas-Gleichungen
16.) Diskussion

Zusammenfassung


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548902_0041

1.) Einleitung

In der klassischen Physik läßt sich das 3-Teilchen-Problem bekanntlich nicht geschlossen lösen. In der Quantenmechanik jedoch lassen sich Gleichungssysteme angeben, die das Problem exakt beschreiben. Das erste dieser Systeme stammt von Faddeev [1], weitere von Lovelace [2], Weinberg [3] und Sandhas [4].

Die vorliegende Arbeit soll zeigen, wie sich die Faddeev-Gleichungen auf Teilchen mit Spin ausdehnen lassen, und was hierbei beachtet werden muß. Als Beispiel wird die Deuteron-Helium-Streuung als 3-Teilchen-Problem behandelt.

Einleitend werden im ersten Teil der Arbeit einige Ergebnisse aus der Literatur referiert: zunächst in Kap. 2 das 2-Teilchen-Problem, dann die Definition von Koordinaten (Kap. 3) und der Lösungsweg von Faddeev in Kap. 4. Das Kap. 5 ist analog zu Faddeev bearbeitet. Die folgenden Kapitel behandeln phänomenologische Aussagen, Partialwellenanalyse und verschiedene Lösungswege.

Im weiteren Teil werden die Ergebnisse des ersten Teils auf Beispiele angewendet. Zunächst werden in einem einfachen Modell alle notwendigen Schritte explizit vorgeführt, da sie hier leicht zu überblicken sind. Wie gut man das Deuteron-Helium-System als 3-Teilchen-Problem beschreiben kann, wird in Kap. 11 diskutiert. Für die 2-Teilchenwechselwirkungen werden Kastenpotentiale gewählt. Nach einer separablen Näherung für die jeweiligen T-Matrizen, werden verschiedene Lösungsverfahren am Deuteron-Helium-System durchgeführt.

2.) Abriss des 2-Teilchen-Problems

Bekanntlich beschreiben die Lösungen ψ der Schrödingergleichung

$$h\,\psi = z\,\psi \qquad (2.1)$$

das 2-Teilchen-Problem vollständig [5]. Hierbei ist h der

2-Teilchen-Hamiltonian und z die Energie. Eine andere Beschreibung, die insbesonders in der Streutheorie gewählt wird, liefert die Lippmann-Schwinger-Gleichung (5).

$$t(z) = v + vg_o(z)t(z) = v + t(z)g_o(z)v \tag{2.2}$$

Hierbei heißt t Übergangsmatrix oder T-Matrix und g_o ist die freie Green'sche Funktion.

Eine formale Lösung von 2.2 ist

$$t(z) = v + vg(z)v \tag{2.3}$$

wobei $g(z) = (z-h)^{-1}$ die volle Green'sche Funktion ist.

In (2.1) ist das Problem als Differentialgleichung, in (2.2) als Integralgleichung formuliert. Bei Integralgleichungen existieren hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung; ferner gibt es Vorschriften, wie diese Lösungen zu erhalten sind. Deshalb ist es zweckmäßiger für Existenzuntersuchungen, von der Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.2) auszugehen.

Für ein Zentralpotential sind die Bedingungen für die Existenz einer Lösung

$$\int_0 r^2 \left[V(r)\right]^2 dr \; < \infty \tag{2.4a}$$

und

$$\int^{\infty} \left[V(r)\right]^2 dr \; < \infty \tag{2.4b}$$

von Weinberg (6) angegeben worden.

Die Bedingungen werden von allen üblichen Potentialen erfüllt. Eine Ausnahme stellen lediglich Potentiale mit einem hard-core dar. Jedoch lassen sich, wie Kowalski (7) gezeigt hat, solche singuläre Potentiale analog behandeln. Demnach hat die Lippmann-Schwinger-Gleichung in kernphysikalischen Problemen immer eine Lösung.

Eine solche Lösung [5] kann entweder mit Hilfe der Bornschen-Reihe, der Fredholmschen Reihe, oder durch andere numerische Verfahren, z.B. Matrix-Inversion, gefunden werden. Die T-Matrix ist mittels der Bornschen Reihe graphisch in Fig. 1 veranschaulicht.
Die Bornsche Reihe konvergiert nicht immer, z.B. in der Nähe eines gebundenen Zustandes. Die Fredholmsche Reihe hingegen konvergiert für alle z.
Das 2-Teilchen-Problem ist also prinzipiell immer lösbar und kann beliebig genau approximiert werden. Als Kontrolle für die Güte der Approximation kann die sogenannte Unitaritätsrelation [1]

$$t(z_1) - t(z_2) = (z_1-z_2)t(z_1)g_o(z_1)g_o(z_2)t(z_2) \qquad (2.5)$$

herangezogen werden. +)

Für das 2-Teilchen-Problem gibt es also eine stets lösbare Gleichung und die Güte von Näherungsverfahren kann getestet werden.

3.) Schwierigkeiten des 3-Teilchen-Problems; Wahl der Koordinaten

Es liegt nahe, das 3-Teilchen-Problem in Analogie zum 2-Teilchen-Problem zu lösen. Hierzu stellt man wiederum die Lippmann-Schwinger-Gleichung auf:

$$T(z) = V+VG_o(z)T(z) = V+T(z)G_o(z)V \qquad (3.1)$$

Hierbei ist V die Summe der Zweiteilchenwechselwirkungen.
Für eine Lösung nach den vom 2-Teilchen-Problem her bekannten Verfahren ist (3.1) jedoch nicht geeignet. Der Kern der Integralgleichung ist nicht kompakt. Somit die die hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung nicht erfüllt (siehe hierzu We [3] Anhg.).

+) Anm.: Hierin ist z.B. das optische Theorem enthalten.

Insbesonders ergeben sich die folgenden Schwierigkeiten:

a) Divergenz der Bornschen Reihe: Diese Tatsache ist in Fig. 2 veranschaulicht. Hierbei bezeichnet man man die in Zeile (I) - (III) gezeigten Graphen als nicht zusammenhängend, die in (IV) als zusammenhängend. Die ersten drei Zeilen stellen jeweils die Wechselwirkung eines Paares in Gegenwart eines nicht wechselwirkenden dritten Teilchens dar. Jede dieser Zeilen ist also proportional der jeweiligen 2-Teilchen-T-Matrix. Nach dem vorhergehenden Kapitel folgt daraus, daß immer eine Zeile [I, II, III] divergiert, je nachdem, welcher Zustand gerade gebunden ist. Die Divergenz der Bornschen Reihe ist nicht überraschend, da ja bereits beim 2-Teilchen-Problem die Bornsche Reihe für gewisse Energien divergiert. Hier, beim 3-Teilchen-Problem jedoch divergiert die Bornsche Reihe für alle Energien.

b) Die zweite Schwierigkeit ist ebenfalls eng mit den nicht zusammenhängenden Graphen verbunden. Für das freie, nicht wechselwirkende Teilchen tritt in einer analytischen Form der T-Matrix (3.1) eine δ-Funktion auf, die die Impulserhaltung dieses Teilchens garantiert. Das gilt für alle Prozesse der Zeilen I, II und III, jedoch wird jeweils der Impuls eines anderen Teilchens erhalten. Bei der Aufsummation der Fig. 2 können diese δ-Funktionen darum nicht absepariert werden.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Lösung der Integralgleichung existiert, fordert [3], daß die Spur des Integralkerns endlich ist. Da die Spur der δ-Funktion nicht endlich ist, ist somit die Lösung nicht garantiert. Deswegen sind die Lösungsverfahren vom 2-Teilchen-Problem nicht anwendbar.

c) Ein drittes Problem ist weniger offenkundig: Wie können - gleichzeitig in allen Kanälen - die Randbedingungen in die Integralgleichung eingebaut werden? Oder in anderen Worten, wie hängen die physikalisch beobachtbaren Größen, d.h. die S-Matrix, mit den Lösungen von (3.1) zusammen?

Dies sind die drei prinzipiellen Schwierigkeiten des 3-Teilchen-Problems. Im Folgenden wird gezeigt, wie sie überwunden werden können.

Wie man aus den Zeilen (I), (II) und (III) von Fig. 2 sieht, kann man die Divergenz dieser Zeilen beseitigen, indem man statt eines Potentials die 2-Teilchen-T-Matrix einführt. Einen Hinweis, wie man die in (b) geschilderten Schwierigkeiten überwinden kann, gibt Zeile (IV). Hier wechselwirken nacheinander verschiedene Paare von Teilchen. Als Folge dessen treten keine δ-Funktionen mehr auf (nach Ausintegration über die Zwischenzustände). Man muß also erreichen, daß von einer gewissen Iteration der Integralgleichung an nur noch verschiedene Paare nacheinander wechselwirken. Das führt auf den von Faddeev vorgeschlagenen Lösungsansatz. Dieser wird im nächsten Kapitel skizziert und auf Teilchen mit Spin verallgemeinert.

Um im folgenden auch analytische Ausdrücke, und nicht nur Operatoren anschreiben zu können, sollen Koordinaten eingeführt werden.

Ausgehend von den Einzelteilchenimpulsen $\hbar\underline{k}_i$ definiert man Linearkombinationen $\underline{K}$, $\underline{p}$ und $\underline{q}$.

$$\underline{K} = \sum_i \underline{k}_i$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{p}_k \underset{\text{zyklisch}}{\equiv} \underline{p}_{ij} &= \frac{m_j\underline{k}_i - \underline{k}_j m_i}{m_i + m_j} \\ \underline{q}_k &= \frac{m_k(\underline{k}_i+\underline{k}_j) - (m_i+m_j)\underline{k}_k}{m_i + m_j + m_k} \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} 3 \text{ Paare} \\ \text{möglich} \end{matrix} \qquad (3.2)$$

Hierbei ist $\hbar\underline{K}$ der Gesamtimpuls der drei Teilchen, $\hbar\underline{p}_k$ der Relativimpuls von Teilchen i und j und $\hbar\underline{q}_k$ der Relativimpuls von Teilchen k bezogen auf den Schwerpunkt von Teilchen i und j.

Statt der Einzelteilchenimpulse können diese Linearkombinationen als unabhängige Variable gewählt werden. Im Schwerpunktsystem ist $\underline{K} = 0$ und kann somit außer acht gelassen werden. Jedes Paar (p_k, q_k) läßt sich durch ein anderes Paar (p_i, q_i), (p_i, p_j) oder (q_i, q_j) ausdrücken.

Für die kinetische Energie erhält man in diesen Variablen

$$E = \frac{\hbar^2 p_k^2}{2\mu_k} + \frac{\hbar^2 q_k^2}{2n_k} \qquad k = 1, 2, 3 \tag{3.3}$$

mit den reduzierten Massen

$$\mu_k \equiv \mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i+m_j} \text{ und } n_k = \frac{m_k(m_i+m_j)}{m_i+m_j+m_k} \tag{3.3a}$$

Für die praktische Rechnung sind zwei weitere Relationen der Impulse sehr geeignet:

$$\left.\begin{aligned} \underline{p}_i &= -\alpha_{ij}\underline{p}_j - \varepsilon_{ijk}\beta_{ij}\underline{q}_j \\ \underline{q}_i &= \varepsilon_{ijk}\underline{p}_j - \gamma_{ij}\underline{q}_j \end{aligned}\right\} \; i \neq j \neq k \neq i \tag{3.4}$$

Hierbei ist ε_{ijk} der total schiefsymmetrische Tensor 3. Stufe,

$$\alpha_{ij} = \frac{m_j}{m_i+m_k}, \quad \beta_{ij} = \frac{m_k(m_1+m_2+m_3)}{(m_i+m_k)(m_j+m_k)}, \quad \gamma_{ij} = \frac{m_i}{m_i+m_k}$$

4.) Lösungsweg von Faddeev und die Verallgemeinerung auf Teilchen mit Spin

In diesem Kapitel ist der von Faddeev vorgeschlagene Lösungsweg skizziert.

Zur Beseitigung der Divergenzen müssen, wie im vorigen Kapitel gesagt wurde, die Potentiale durch die T-Matrizen ersetzt werden. Hierzu benötigt man die 2-Teilchen-T-Matrix im Hilbertraum der drei Teilchen $T_\alpha(z) = V_\alpha + V_\alpha G_o(z) T_\alpha(z)$. [+)]

Ihre Matrixelemente sind gegeben durch

$$\langle \underline{p}'_\alpha \underline{q}'_\alpha | T_\alpha(z) | \underline{p}_\alpha \underline{q}_\alpha \rangle = \delta(\underline{q}'_\alpha - \underline{q}_\alpha) \langle \underline{p}'_\alpha | t_\alpha(z - \frac{h^2 q_\alpha^2}{2n_\alpha}) | \underline{p}_\alpha \rangle \qquad (4.1)$$

Die 2-Teilchen-T-Matrix im 3-Teilchen-Hilbertraum, ist also direkt mit der vom 2-Teilchen-Hilbertraum verknüpft. Es muß jedoch die kinetische Energie des freien Teilchens von der Gesamtenergie abgezogen werden.

Zur Beseitigung der δ-Funktionen von (3.1) steuert Faddeev auf ein <u>System</u> von Gleichungen zu. Zu diesem Zweck definiert er Operatoren $M_{\alpha\beta}(z)$ durch

$$M_{\alpha\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} + V_\alpha G(z) V_\beta$$

mit der Eigenschaft $\sum_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}(z) = T(z)$. Hierbei ist $G(z) = G_o(z) + G_o(z) V G(z)$ die volle Greensche Funktion des 3-Teilchen-Problems.

Verwendet man die Integralgleichung für die volle Greensche Funktion, so erhält man das System

$$M_{\alpha\beta}(z) = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} + V_\alpha G_o(z) \sum_\gamma M_{\gamma\beta}(z) \qquad (4.3)$$

Dieses System ist keineswegs besser als (3.1), es enthält nämlich noch immer die δ-Funktion und die Potentiale. Durch algebraische Umformung jedoch lassen sich die oben definierten 2-Teilchen-T-Matrizen (im 3-Teilchen-Hilbertraum) einführen.

[+)] <u>Anm.:</u> Großbuchstaben bezeichnen Operatoren im 3-Teilchen-Hilbertraum, Kleinbuchstaben solche im 2-Teilchen-Hilbertraum

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z) + T_\alpha(z)G_o(z)\sum_{\gamma\neq\alpha} M_{\gamma\alpha}(z) \qquad (4.4)$$

Hierin sind nun die Potentiale beseitigt und damit auch die Divergenzen aus Fig. 2 (Zeile (I) - (III)). Weiterhin tauchen bei Iteration keine δ-Funktionen mehr auf, da immer verschiedene Paare nacheinander wechselwirken. Die Bornsche Reihe von M_{11} ist in Fig. 3 graphisch dargestellt.

Die δ-Funktion in der Inhomogenität von Gl. (4.4) ist harmlos. Da sie in keiner Iteration mehr auftaucht, bewirkt sie keine Divergenzen. Sie läßt sich, falls notwendig, durch eine weitere Definition $W_{\alpha\beta}(z) = M_{\alpha\beta}(z) - \delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z)$ beseitigen. Damit erhält man dann das System

$$W_{\alpha\beta}(z) = -(1-\delta_{\alpha\beta})T_\alpha(z)G_o(z)T_\beta(z) + T_\alpha(z)G_o(z)\sum_{\gamma\neq\alpha} W_{\gamma\beta}(z) \qquad (4.5)$$

Faddeev hat gezeigt, daß das System (4.4) bzw. (4.5) unter gewissen Voraussetzungen über die 2-Teilchen-T-Matrix eine Lösung besitzt, und daß diese nach den Verfahren des 2-Teilchen-Problems gewonnen werden kann. Da (4.4) eine Operatorengleichung darstellt, ist die Verallgemeinerung auf Teilchen mit Spin formal einfach durchzuführen. Im Kap. 6 wird untersucht, ob die Voraussetzungen dafür auch in diesem Fall erfüllt sind.

Ebenso wie beim 2-Teilchen-Problem läßt sich eine Unitaritätsrelation mit Hilfe der Greenschen Funktion ableiten.

$$M_{\alpha\beta}(z_1) - M_{\alpha\beta}(z_2) = (z_1 - z_2)\sum_\gamma M_{\alpha\gamma}(z_1)G_o(z_1)G_o(z_2)\sum_\gamma M_{\gamma\beta}(z_2) \qquad (4.6)$$

Diese Gleichung ist jedoch von wenig praktischem Wert, da für physikalische Probleme nur 3 Gleichungen vom System (4.4) gelöst werden müssen (siehe nächstes Kapitel), hier jedoch alle neun.

5.) Zusammenhang zwischen der S-Matrix und der Lösung der Faddeev-Gleichungen

Faddeev muß einige Annahmen über die 2-Teilchen-T-Matrix machen, um die Randbedingungen in die Integralgleichungen einbauen zu können. Die wesentlichste hiervon ist, daß sich die 2-Teilchen-T-Matrix eindeutig darstellen lassen muß als Summe von einem Polterm für gebundene Zustände und einer analytischen Funktion $\hat{t}(z)$

$$t(z) = \frac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{z-E} + \hat{t}(z) \qquad (5.1)$$

Dies läßt sich sofort erweitern auf

$$t(z) = \sum_{\nu} \frac{|\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu|}{z - E_\nu} + \hat{t}(z) \qquad (5.1')$$

Hierbei gilt: $|\varphi_\nu\rangle = V|\psi_\nu\rangle$

und $h|\psi_\nu\rangle = E_\nu|\psi_\nu\rangle$

ν beschreibt die Gesamtheit der Quantenzahlen. Es muß ausgeschlossen werden, daß in der Entwicklung mehrfache Pole auftreten, da diese Divergenzen zur Folge haben. Im nächsten Kapitel wird (5.1') kurz bewiesen.

Die Darstellung (5.1') läßt sich auf die Operatoren $M_{\alpha\beta}$ übertragen. Für die Matrixelemente $Q_{\alpha\beta}$ dieser Operatoren gilt dann eine Darstellung

$$Q_{\alpha\beta}(p q_\alpha, p' q'_\beta; z) = F_{\alpha\beta}(p q_\alpha, p' q'_\beta; z) + \sum_{\nu} Q_{\alpha\beta\nu}(p q_\alpha, q'_\beta; z) \frac{\varphi^+_{\beta\nu}(p'_\beta)}{z - E_{\beta\nu} - \frac{\hbar^2 q'^2_\beta}{2 n_\beta}} +$$

$$\sum_{\mu} \frac{\varphi_{\alpha\mu}(p_\alpha)}{z - E_{\alpha\mu} - \frac{\hbar^2 q^2_\alpha}{2 n_\alpha}} \tilde{Q}_{\alpha\mu\beta}(q_\alpha, p' q'_\beta; z) + \sum_{\mu\nu} \frac{\varphi_{\alpha\mu}(p_\alpha)}{z - E_{\alpha\mu} - \frac{\hbar^2 q^2_\alpha}{2 n_\alpha}} H_{\alpha\mu\beta\nu}(q_\alpha, q'_\beta; z) \frac{\varphi^+_{\beta\nu}(p'_\beta)}{z - E_{\beta\nu} - \frac{\hbar^2 q'^2_\beta}{2 n_\beta}} \qquad (5.2)$$

Definiert man noch weitere Operatoren $K_{\alpha\beta}$ durch

$$K_{\alpha\beta\mu\nu}(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q'_\beta; z) = G_{\alpha\beta\mu\nu}(p_\alpha q_\alpha, p'_\beta q'_\beta; z) + \sum_\nu \frac{\Phi_{\alpha\nu}(p_\alpha)}{z - E_{\alpha\nu} - \frac{\hbar^2 q_\alpha^2}{2m_\alpha}} H_{\alpha\nu\beta\mu}(q_\alpha, q'_\beta; z) \qquad (5.3)$$

so lassen sich die Operatoren H und K leicht physikalisch deuten. Dies zeigt sich am deutlichsten in Zusammenhang mit der S-Matrix. Die Matrixelemente F, G etc. lassen sich nach Lösung der Integralgleichungen aus $M_{\alpha\beta}$ erhalten. Die Randbedingungen lassen sich jetzt einfach durch die Art, wie der Grenzübergang in z zur reellen Achse gemacht werden soll, unterbringen.

Unter der Voraussetzung (5.1') lassen sich die S-Matrizen für die einzelnen Prozesse angeben.

a) Streuung von 3 freien Teilchen in 3 freie Teilchen

$$S_{00}(p q, p' q') = \delta(p - p')\delta(q - q') - 2\pi i\, \delta(E - E') \sum_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta}(p q, p' q'; E + i0) \qquad (5.4)$$

Um also diesen Prozess beschreiben zu können, müssen alle neun $M_{\alpha\beta}$ berechnet werden. Experimentell ist dieser Prozess nicht direkt zugänglich, er macht sich jedoch in dichten Gasen bemerkbar.

b) Der 3-Teilchen-Zerfall

$$S_{0\alpha\nu}(p q, q'_\alpha) = -2\pi i\, \delta(E - \tilde{E}'_{\alpha\nu}) \sum_\beta K_{\beta\alpha\nu}(p q, q'_\alpha; \tilde{E}'_{\alpha\nu} + i0) \qquad (5.5)$$

mit $\tilde{E}'_{\alpha\nu} = E_{\alpha\nu} + \frac{\hbar^2 q_\alpha'^2}{2m_\alpha}$

Hierbei werden nur die drei $M_{\alpha\beta}$ benötigt, die miteinander verkoppelt sind. Experimentell ist über diesen Prozess in der Kernphysik nicht genügend bekannt.

c) Elastische Streuung an gebundenen Zuständen und Rearrangement-Prozesse.

$$S_{\alpha\nu\beta\mu}(q_\alpha, q'_\beta) = \delta(q_\alpha - q'_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\nu\mu} - 2\pi i\,\delta(\tilde{E}_{\alpha\nu} - \tilde{E}'_{\beta\mu})\,H_{\alpha\nu\beta\mu}(q_\alpha, q'_\beta; E'_{\beta\mu}+i0) \quad (5.6)$$

Wegen der Verkopplung der Gleichungen sind auch hier drei $M_{\alpha\beta}$ zu berechnen. Für diese Gruppe von Prozessen gibt es viele gut gemessene experimentelle Beispiele, so daß versucht werden kann, mit dem hier verwandten Formalismus, die Experimente zu beschreiben, z.B. Proton-Deuteron-Streuung oder Deuteron-Helium-Streuung.

Die noch verbleibende Frage der Existenz der Darstellung (5.1') wird im folgenden Kapitel für Teilchen mit Spin geklärt.

6.) Begründung für eine spezielle Darstellung der 2-Teilchen-T-Matrix

Es handelt sich hier um ein sehr abstraktes Problem der Funktionalanalysis. Es läßt sich daher nicht vermeiden, Begriffe zu verwenden, ohne sie hier zu definieren. Die Definitionen sind in einschlägigen Lehrbüchern (z.B. Hille-Phillips [8], Dunford-Schwartz [9], Taylor [10] oder in modernen Abhandlungen über Streutheorie (z.B. Newton [11]) zu finden.

Über (2.3) ist die T-Matrix mit der vollen Greenfunktion des Hamiltonian verknüpft. Das Problem der Darstellung der T-Matrix reduziert sich also auf die Untersuchung der Greenschen Funktion (Resolvente).

Die Resolvente r eines Operators K ist definiert durch

$$r(z) = (z-K)^{-1}$$

falls der rechten Seite ein Wert zugeordnet werden kann. Die Funktionalanalysis betrachtet nun zu gegebenem K die Resolvente als Funktion der komplexen Variablen z. Physikalisch kann z, zumindest für reelle Werte, als Energie gedeutet werden. Das Problem ist, die Analytizität dieser Funktion zu untersuchen.

Es läßt sich nun verhältnismäßig leicht zeigen, daß falls K nur einfache Eigenwerte hat, die Resolvente in der Umgebung dieser Eigenwerte nur einfache Pole besitzt [8] und die Darstellung (5.1') eindeutig ist. Über das globale Verhalten ist hierbei noch keine Aussage gemacht, es wird in der Physik auch nicht benötigt (nicht "Physikalische Blätter").

Treten nun mehrfache Eigenwerte auf, so kann man mit verhältnismäßig einfachen Sätzen aus der Funktionalanalysis [8] beweisen, daß nur Pole höchstens vom Grad der Entartung möglich sind. Bei Teilchen mit Spin jedoch liegt fast immer Entartung vor, also könnten mehrfache Pole auftreten. Diese würden Divergenzen bewirken. Man muß sich also auf Klassen von Operatoren beschränken, deren Resolventen nur einfache Pole besitzen. Dies ist für hermitische Operatoren K ($K = K^+$) der Fall. [+)]
Es bleibt also zu zeigen, daß der Gesamthamiltonian hermitisch ist.

Vom freien Hamiltonian h_o ist bekannt, daß er hermitisch ist. Kato [12] hat gezeigt, daß für eine weite Klasse von Potentialen v auch $h = h_o + v$ hermitisch ist, falls v gewisse Bedingungen erfüllt. Dazu ist nicht notwendig, daß v hermitisch ist, es genügt, daß das Potential symmetrisch, d.h. $(vg,f) = (g,vf)$, ist und gewisse Stetigkeits- und Beschränktheitsbedingungen erfüllt.

[+)] Anm.: Für hermitsche Operatoren gilt nämlich

$$r(z) = (z-K)^{-1} = \int_{\text{Spektrum von } K} \frac{dP(z')}{z-z'}$$

wobei P(z) die sogenannte resolution of identity ist.
Mittels dieser Relation kann man zeigen [11], daß die Resolvente eines hermitschen Operators auf der negativ reellen Achse nur einfache Pole und im kontinuierlichen Spektrum einen oder mehrere Verzweigungspunkte besitzt auch für Teilchen mit Spin.

Insgesamt muß man also nur fordern, daß das Potential v symmetrisch ist und die oben erwähnten Bedingungen erfüllt, um die Darstellung der T-Matrix voraussetzen zu können. Diese Bedingungen sind dann auch hinreichend dafür, daß die Faddeev-Gleichungen eine Lösung haben.
Die Bedingungen sind nicht scharf. Sie schließen beispielsweise das Coulombpotential aus. Wie man 3-Teilchen-Probleme bei Anwesenheit eines Coulombpotentials behandeln kann, zeigt Noble (25).

7.) Phänomenologische Aussagen aus den Gleichungen

Vom 2-Teilchen-Problem ist bekannt, daß Invarianzen der Wechselwirkung die Struktur der T-Matrix stark vereinfachen (Goldberger-Watson (13)). Bei Zentralpotentialen z.B. sind die auslaufenden Teilchen unpolarisiert, falls unpolarisiert eingeschossen wird. Eine Polarisation kann bei allgemeinen spinabhängigen Potentialen nur in der Richtung der Normalen zur Reaktionsebene auftreten. Dies liegt an der Spiegelungsinvarianz der starken Wechselwirkung.

Beim 3-Teilchen-Problem liefern Invarianzen keine wesentliche Vereinfachung der T-Matrix. Dies liegt daran, daß mehr als 2 Teilchen beteiligt sind, und damit im Schwerpunktsystem mehr als 2 Impulse in Eingangs- und Ausgangskanal zusammen existieren. Aus zwei Impulsen läßt sich nämlich nur ein Skalar bilden, das Skalarprodukt. Jedoch bereits bei drei Impulsen lassen sich neben Skalaren auch Pseudoskalare, wie das Spatprodukt bilden. Das gleichzeitige Auftreten von Skalaren und Pseudoskalaren bewirkt, daß keine Vereinfachung eintritt. So sind z.B. beim 3-Teilchenzerfall mehrere Polarisationsrichtungen möglich.

Die Kopplung der Kanäle aneinander bewirkt, daß sich die Struktur der einzelnen Kanäle aufeinander überträgt. Ist zum Beispiel nur eine von den 3 Wechselwirkungen spinabhängig, so sind in allen Kanälen Polarisationseffekte möglich.

3.) Partialwellenanalyse und Kopplungsschemata

Beim 2-Teilchen-Problem wird nicht (2.2) direkt gelöst, sondern zunächst eine Partialwellenanalyse durchgeführt. Genauso versucht man nun beim 3-Teilchen-Problem nicht (4.4) bzw. (4.5) zu lösen, sondern löst diese Systeme nur für die einzelnen Partialamplituden.

Beim 2-Teilchen-Problem ist die Partialwellenanalyse in einfacher Weise durchführbar. Hier hängen nämlich die Lösungen, d.h. die T-Matrix nur von je einem Vektor im Eingangs- und Ausgangskanal ab. Diese Vektoren werden in Betrag und Richtung zerlegt, d.h. man führt eine Entwicklung nach Kugelfunktionen durch. Die physikalische Bedeutung dieser Entwicklung ist eine Entwicklung nach Drehimpulsen. Die einzelnen Summanden nennt man Partialamplituden und die Entwicklung selbst Partialwellenanalyse. Da der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, zerfallen die Gleichungen zunächst in einzelne Gleichungen zu gleichem Drehimpuls. Falls die Wechselwirkungen spinabhängig sind und den Gesamtspin nicht erhalten, können jeweils einige Gleichungen gekoppelt sein. Durch die Partialwellenanalyse hat man also erreicht, daß man nicht eine Integralgleichung mit drei kontinuierlichen Variablen lösen muß, sondern nur eine (evtl. teilweise gekoppelte) Anzahl von Integralgleichungen in einem kontinuierlichen Parameter. Dies stellt eine wesentliche Vereinfachung dar, vor allem falls die Lösung mit Hilfe eines Computers durchgeführt werden muß.

Beim 3-Teilchen-Problem hängen die Lösungen von je zwei Vektoren $(\underline{p},\underline{q})$ im Eingangs- und Ausgangskanal ab. Daher liefert eine Entwicklung nach Kugelfunktionen auch je zwei Bahndrehimpulse, und zwar den relativen Bahndrehimpuls zweier Teilchen (die gerade wechselwirken) l_1 und den relativen Bahndrehimpuls des dritten l_2 bezogen auf den Schwerpunkt der beiden anderen. Die Einzelspins der drei Teilchen werden ähnlich zusammengefaßt, und zwar führt man den Kanalspin der 2-Teilchen (die wechselwirken) S_α und den Spin des dritten Teilchen s_α ein.

Im wesentlichen gibt es jetzt zwei Möglichkeiten, alle diese Drehimpulse zu einem Gesamtdrehimpuls zusammen zu koppeln,

nämlich j-j-Kopplung oder L-S-Kopplung. Unter j-j-Kopplung versteht man eine Kopplung, bei der zunächst der relative Bahndrehimpuls zweier Teilchen l_1 und ihr Kanalspin S_α zum Drehimpuls J_α, anschließend l_2 und s_α zum Gesamtdrehimpuls j_α des dritten Teilchens gekoppelt werden und schließlich J_α und j_α zum Gesamtdrehimpuls des Systems J. Bei der L-S-Kopplung werden zunächst die Bahndrehimpulse l_1 und l_2 zum Gesamtbahndrehimpuls L, dann S_α und der Spin des dritten Teilchens s_α zum Gesamtspin S gekoppelt und dieser wiederum mit L zum Gesamtdrehimpuls J.

Bei den Faddeev-Gleichungen sind beide Kopplungsschemata möglich, und es hängt von den jeweiligen Einzelspins ab, ob eines der Schemata günstiger ist.

Man kann nun bei Festlegung der Koordinaten eine allgemeine Partialwellenanalyse angeben. Als Beispiel hierfür wird die Inhomogenität von Gl. (4.5) $T_\alpha G_0 T_\gamma$ in einer Partialwellenanalyse in L-S-Kopplung dargestellt.

$$\langle p'_\alpha q'_\alpha s_1 s_2 s_3 l'_1 l'_2 S'_\alpha S' L' J' M' | \bar{T}_\alpha(z) G_0(z) \bar{T}_\gamma(z) | p_\gamma q_\gamma s_1 s_2 s_3 l_1 l_2 S_\gamma S L J M \rangle = 16\pi^{3/2} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \times$$

$$\hat{S}\hat{S}'\hat{L}\hat{L}'\hat{J} \sum_{\substack{L_\alpha S''_\alpha I_\alpha I_\gamma L''_\gamma S''_\gamma \\ N e f f' e' d d'}} (-)^{S_\alpha + S_\beta - S''_\gamma + d' + S'_\alpha + S_\gamma + L + L' + f'} \hat{N} \hat{I}_\alpha^2 \hat{I}_\gamma^2 \hat{S}''_\alpha \hat{S}''_\gamma \hat{e}^3 \hat{e}'^2 \hat{f}^3 \hat{f}'^3 \hat{d}''^4 \hat{d}'^3 \times$$

$$\begin{Bmatrix} L''_\gamma & L_\alpha & e \\ l_2 & l'_2 & e' \\ N & N & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L''_\gamma & L_\alpha & e \\ S''_\gamma & S''_\alpha & f \\ I_\gamma & I_\alpha & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_\beta & s_\beta & 0 \\ s_\alpha & s_\gamma & f \\ S''_\gamma & S''_\alpha & f' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l'_1 & e' \\ S_\gamma & S'_\alpha & f' \\ I_\gamma & I_\alpha & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_\alpha & S_\gamma & f' \\ s_\alpha & s_\gamma & f \\ S' & S & d' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 & l'_1 & e' \\ l_2 & l'_2 & e \\ L & L' & d' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' & L & d' \\ S' & S & d' \\ J & J & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e' & f' & d \\ e & f & d \\ d' & d' & 0 \end{Bmatrix} \times \qquad (8.1)$$

$$\sum_{\Lambda \lambda n} (L_\alpha \Lambda l'_2 \lambda | N\nu)(L''_\gamma \nu l_2 0 | N\nu) \times \int Y^*_{l'_2 \lambda}(\hat{q}''_\alpha, \hat{q}''_\gamma, 0) Y^*_{L_\alpha \Lambda}(\hat{p}''_\alpha, \hat{q}''_\gamma, 0) Y_{L''_\gamma \nu}(\hat{p}''_\gamma, \hat{q}''_\gamma, 0) \frac{\delta(q''^2_\alpha - q'^2_\alpha)}{q'_\alpha} \frac{\delta(q''^2_\gamma - q^2_\gamma)}{q_\gamma} \times$$

$$\times \langle p'_\alpha l'_1 S'_\alpha I_\alpha | t_\alpha(z - \frac{\hbar^2 q'^2_\alpha}{2n_\alpha}) | p''_\alpha L_\alpha S''_\alpha I_\alpha \rangle \langle p''_\gamma L''_\gamma S''_\alpha I_\gamma | t_\gamma(z - \frac{\hbar^2 q^2_\gamma}{2n_\gamma}) | p_\gamma l_1 S_\gamma I_\gamma \rangle \frac{p''^2_\gamma q''^2_\gamma dp''_\gamma dq''_\gamma d\hat{p}''_\gamma \hat{q}''_\gamma}{Z - E''}$$

Diese Beziehung ist nicht so trivial wie diejenige im 2-Teilchenfall zu erhalten. Man muß nämlich außer der Entwicklung nach Kugelfunktionen und anschließender Verkopplung, auch über einen Teil der Winkel integrieren und anschließend nochmals koppeln. Was die einzelnen Symbole bedeuten und wie man die Beziehung im einzelnen erhält, wird am Modellbeispiel genau gezeigt, da dies wesentlich übersichtlicher ist.

Worauf es bei dieser Formel ankommt ist, daß über sehr viele Drehimpulse, nämlich N, e, f, d, e', f' und d' summiert werden muß. Diese Drehimpulse ergeben sich nur aus der Kopplung. Dies liegt an der Struktur der Gleichungen. Diese beinhalten ja, daß falls zuerst das Paar α wechselwirkt, anschließend ein anderes wechselwirkt. Dies wiederum bedeutet, daß eine Umkopplung vom Kanal α auf den Kanal γ vorgenommen werden muß. Da nur der Gesamtdrehimpuls eine gute Quantenzahl ist, nicht jedoch Gesamtspin oder Gesamtbahndrehimpuls, ergeben sich bei der Umkopplung "Zwischendrehimpulse" (N, e, f, ...). Über diese muß anschließend summiert werden.

Vereinfacht sich das Problem durch spezielle Spins, so bleiben die "Zwischendrehimpulse" fast alle erhalten. Sie lassen sich meist nur nach langwieriger Diskussion teilweise durch Drehimpulse ersetzen, die bereits bekannt sind. Dies liegt daran, daß über die magnetische Quantenzahlen bereits summiert ist.

Es wurde darauf verzichtet, eine allgemeine Partialwellenanalyse an den Faddeev-Gleichungen anzugeben. Sie ist nämlich fast immer komplizierter als eine direkt für das spezielle Problem durchgeführte Analyse.

Sind beispielsweise die drei Spins 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, so erhält man bei direkter Aufstellung der Partialwellenanalyse nur zwei "Zwischendrehimpulse" (in einfachen Fällen nur einen) wie später gezeigt wird. Setzt man dagegen diese Spins in (8.1) ein, so bleiben immer noch sechs "Zwischendrehimpulse".

Es bleibt zu erwähnen, daß durch den Spin der Teilchen wesentlich mehr Partialamplituden gekoppelt werden, als bei spinlosen Teilchen.

Im Prinzip lassen sich die Faddeev-Gleichungen (4.4) bzw. (4.5) nach den in Kapitel 2 erwähnten Verfahren lösen. Praktisch ist das jedoch nicht durchführbar. Auch nach einer Partialwellenanalyse hängen die Lösungen immer noch von vier kontinuierlichen Variablen ab. Weiterhin sind jeweils eine ganze Reihe von Partialamplituden miteinander verkoppelt, im Prinzip unendlich viele. Falls die jeweiligen 2-Teilchen-Wechselwirkungen nur durch einige Partialamplituden beschrieben werden können, so sind auch von den 3-Teilchen-Amplituden nur endlich viele miteinander verkoppelt. Da auch bei einfachsten Wechselwirkungen die Integrationen nicht analytisch durchgeführt werden können, muß zur Lösung ein Computer herangezogen werden. Gute numerische Verfahren sind jedoch nicht anwendbar, da sie zu großen Aufwand erfordern. Auch eine Entwicklung der Lösungen als Bornsche Reihe scheidet wegen der im allgemeinen schlechten Konvergenz aus. Das wird an einem Beispiel gezeigt.

Es müssen also Näherungen durchgeführt werden. Am geeignetsten hierzu sind Separationsansätze für den Kern der Integralgleichungen, d.h. für die 2-Teilchen-T-Matrix. Ein solcher Separationsansatz vereinfacht das Problem mathematisch sehr. Außerdem ist er physikalisch plausibel [4].

Wie sich eine Integralgleichung bei einem separablen Kern mathematisch vereinfacht, soll am Beispiel einer Integralgleichung mit nur einer Variablen gezeigt werden.

Eine allgemeine Integralgleichung vom Typ

$$f(x) = g(x) + \int K(x,x')\, f(x')\, dx' \qquad (9.1)$$

kann nach den üblichen Lösungsverfahren gelöst werden.

Hierbei wird f(x) als eine unendliche Reihe dargestellt, die irgendwo abgebrochen werden muß, je nach der Güte der Konvergenz der Reihe.

Ist der Kern K(x,x') separabel, d.h. gilt

$$K(x,x') = h(x)\, j(x')$$

so reduziert sich die Integralgleichung auf eine algebraische Gleichung. Man kann nämlich den Ansatz für $f(x) = Ag(x)+Bh(x)$ machen und braucht nur noch A und B aus einem linearen Gleichungssystem zu bestimmen.

Es bleibt die physikalische Begründung für eine separable 2-Teilchen-T-Matrix.

Grundsätzlich ist eine separable T-Matrix möglich. Ob die in der Kernphysik auftretenden T-Matrizen jedoch separabel sind, kann nur das Experiment entscheiden. Bis jetzt sind eindeutig nur T-Matrix-Elemente gemessen worden, die auf der Energieschale liegen, d.h. die von der Form sind $\langle p|t(\frac{\hbar^2p^2}{2m}+i0)|p\rangle$. Hierbei ist keine Aussage über die Separabilität von t möglich. Durch genaue Messung der Proton-Proton-Bremsstrahlung [24] jedoch ließe sich Auskunft über die Separabilität erhalten, da hier T-Matrix-Elemente gemessen werden, die teilweise nicht auf der Energieschale liegen, also von der Form $\langle p|t(\frac{\hbar^2p^2}{2m}+i0)|p'\neq p\rangle$.

Es bleibt also zur Zeit nur die Lippmann-Schwinger-Gleichung um über separable T-Matrizen Auskunft zu erhalten. Verwendet man in der Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.2) ein im Impulsraum separables Potential, so erhält man eine separable T-Matrix. Ein separables Potential ist jedoch notwendigerweise nicht-lokal und daher wenig anschaulich. Außerdem muß jede einzelne Partialamplitude am Experiment angepaßt werden. Dies resultiert in einer großen Anzahl von Parametern, so daß man kaum ein tieferes Verständnis der Wechselwirkung gewinnt.

Man kann aber auch von üblichen lokalen Potentialen ausgehen und zwar nicht zu separablen T-Matrizen, aber zu sehr guten separablen Approximationen kommen. Den Weg zu den einfachsten separablen Approximationen zeigte bereits Kapitel 6. Hier erhielt man bereits eine teilweise separable Darstellung.

Eine triviale Approximation ist nun der erste Summand in (5.1), nämlich

$$t(z)\approx\frac{|\varphi\rangle\langle\varphi|}{z-E} \qquad (9.2)$$

Diese Approximation erfüllt jedoch die Unitaritätsrelation (2.4) nicht. Sie ist also physikalisch nicht sinnvoll. So könnte z.B. mehr gestreut werden, als überhaupt einläuft.

Noble [14] zeigte, wie man durch eine Veränderung des Energienenners eine unitäre Approximation erhalten kann. Dazu wählt man als Potential

$$v = \lambda |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

und bestimmt den Parameter λ so, daß das Residuum am Pol der T-Matrix den Wert 1 hat. Dieses recht heuristische Verfahren wurde von Weinberg [6] auf die folgende Weise gerechtfertigt:
Wie in Kapitel 2 erwähnt wurde, ist der Kern der Lippmann-Schwinger-Gleichung kompakt. Jeder kompakte Operator läßt sich durch eine Reihe von separablen Operatoren beliebig genau approximieren [6]. Weinberg approximiert nun verschiedene lokale Potentiale durch separable T-Matrizen und vergleicht die Lage der gebundenen Zustände mit den exakten Werten. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

Von Reiner [15] wurde für das Kastenpotential ein Vergleich der s-Wellen-Partialamplitude nach diesem Näherungsverfahren und der exakten Partialamplitude in einem größeren Energiebereich durchgeführt. Die Übereinstimmung sowohl auf der Energieschale, als außerhalb ist meist besser als 1%. Für 3-Teilchen-Rechnungen liefert also das Näherungsverfahren von Weinberg im Falle von lokalen Potentialen sehr gute separable Approximationen für die T-Matrix.

II. Beispiele

10.) Modellbeispiel zweier skalarer Wechselwirkungen

Das letzte Kapitel schloß die allgemeine Behandlung des 3-Teilchen-Problems ab. Es kann nun an die numerische Lösung von Beispielen herangegangen werden. Wie sich hierbei zeigen wird, sind die sich ergebenden Gleichungen kompliziert, sehr umfangreich und unübersichtlich. Deswegen sollen zunächst alle Schritte, die nötig sind, um auf Gleichungen zu kommen, die dann numerisch mit Hilfe des Computers gelöst werden können, an einem einfachen Beispiel explizit vorgeführt werden, sodaß bei der Behandlung der Deuteron-Helium-Streuung auf Zwischenergebnisse verzichtet werden kann.

Um das Modell möglichst einfach zu halten, sollen hier nur spinlose Teilchen betrachtet werden. Weiterhin soll angenommen werden, daß Teilchen 1 nicht mit Teilchen 2 wechselwirkt. Als Folge dessen werden nur 2 Teilchen miteinander gekoppelt. Zur numerischen Lösung ist (4.5) besser geeignet als (4.4), da es explizit keine δ-Funktionen mehr enthält.

Ein Teil des Gleichungssystems (4.5) ist also jetzt gegeben durch

$$\langle p_1' q_1' | W_{11}(z) | p_1 q_1 \rangle = \int dp'' dq'' \langle p_1' q_1' | T_1(z) g_1(z) | p'' q'' \rangle \langle p'' q'' | \sum_{\alpha \neq 1} W_{\alpha 1}(z) | p_1 q_1 \rangle \qquad (10.1)$$

$$\langle p_2' q_2' | W_{21}(z) | p_1 q_1 \rangle = -\langle p_2' q_2' | T_2(z) g_2(z) T_1(z) | p_1 q_1 \rangle + \int dp'' dq'' \langle p_2' q_2' | T_2(z) g_2(z) | p'' q'' \rangle \langle p'' q'' | \sum_{\alpha \neq 2} W_{\alpha 1}(z) | p_1 q_1 \rangle$$

$$\langle p_3' q_3' | W_{31}(z) | p_1 q_1 \rangle = -\langle p_3' q_3' | T_3(z) g_3(z) T_1(z) | p_1 q_1 \rangle + \int dp'' dq'' \langle p_3' q_3' | T_3(z) g_3(z) | p'' q'' \rangle \langle p'' q'' | \sum_{\alpha \neq 3} W_{\alpha 1}(z) | p_1 q_1 \rangle$$

Die Wahl der Integrationsvariablen p" und q" ist völlig willkürlich, deshalb ist kein Index angegeben.

Da gemäß Voraussetzung $T_3 \equiv 0$ ist, ist auch $W_{31} \equiv 0$ und es bleiben nur 2 gekoppelte Gleichungen übrig. Es bestünde jetzt die Möglichkeit $W_{21}(z)$ in die Gleichung für $W_{11}(z)$ einzusetzen, damit bliebe nur noch eine einzige Integralgleichung übrig. Da dieses Modellbeispiel jedoch alle Schritte eines echten 3-Teilchen-Problems veranschaulichen soll, wird hier auf diese Möglichkeit verzichtet. Somit sind also 2 gekoppelte Integralgleichungen mit 6 kontinuierlichen Variablen zu lösen. Dazu führt man eine Partialwellenanalyse von (10.1) durch:

$$\langle p_1' q_1' l_1' l_2' L' M' | W_{11}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 L M \rangle = \sum_{\substack{\lambda_1' \lambda_2' L'' M'' l_1'' \lambda_1'' \\ l_2'' \lambda_2''}} (l_1' \lambda_1' l_2' \lambda_2' | L' M') (l_1'' \lambda_1'' l_2'' \lambda_2'' | L'' M'') \frac{2}{q_1'^2} \cdot$$

$$\int \delta(q_1''^2 - q_1''^2) Y_{l_1' \lambda_1'}(\hat{p}_1') Y_{l_2' \lambda_2'}(\hat{q}_1') Y^*_{l_1'' \lambda_1''}(\hat{p}_1'') Y^*_{l_2'' \lambda_2''}(\hat{q}_1'') \langle p_1'' q_1'' l_1'' l_2'' L'' M'' | t_1(z - \tfrac{p_1'^2}{2m}) | p_1'' l_1' \rangle \frac{1}{z - \tfrac{p_1''^2}{2m} - \tfrac{q_1''^2}{2m}} \cdot \qquad (10.2)$$

$$\langle p_2'' q_2'' l_1'' l_2'' L'' M'' | W_{21}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 L M \rangle \, d p_2'' \, d q_2'' .$$

Eine analoge Gleichung ergibt sich für W_{21} (hier tritt zusätzlich eine Inhomogenität auf).

Zur Ableitung von (10.2) wurde die bereits erwähnte Relation (4.1)

$$\langle p_\alpha' q_\alpha' | T_\alpha(z) | p_\alpha q_\alpha \rangle = \delta(q_\alpha' - q_\alpha) \langle p_\alpha' | t_\alpha(z - \tfrac{p_\alpha'^2}{2m_\alpha}) | p_\alpha \rangle$$

verwendet. Außerdem wurde berücksichtigt, daß die 2-Teilchen-T-Matrix in einer Drehimpulsdarstellung diagonal ist und nicht von den magnetischen Quantenzahlen abhängt.

Wegen der Orthogonalität der Kugelfunktionen läßt sich beim 2-Teilchen-Problem in der zu (10.2) analogen Gleichung die Winkelintegration trivial ausführen; es bleibt dann nur eine Variable übrig. Hier jedoch scheint mit (10.2) noch nicht allzuviel gewonnen zu sein. Es ist noch immer über 6 Variable zu integrieren. Auch läßt sich die Drehimpulserhaltung noch nicht explizit ablesen. Dazu muß erst noch über einen Teil der Winkel integriert werden. Aus später ersichtlichen Gründen wurde die in (10.1) noch willkürliche Wahl der Integrationsvariablen in (10.2) festgelegt auf: $\underline{q}'' = \underline{q}_2''$ und $\underline{p}'' = \underline{p}_2''$.

Statt über die Richtungen von $\underline{p}_2''$ und $\underline{q}_2''$ unabhängig zu integrieren, kann man auch einen dieser Vektoren als Bezugsvektor wählen. Dann werden die Integrationen einmal über die räumliche Lage dieses Bezugsvektors und zum anderen über den Winkel zwischen den beiden Vektoren ausgeführt. Hierbei kann man das Drehverhalten der Kugelfunktionen ausnützen.

$$Y_{\ell m}(\hat{p}_i) = \sum_{m'} D^{\ell}_{m'm}(\alpha, \Theta_{pk}, \varphi_{pk})\, Y_{\ell m'}(\hat{p}_i \cdot \hat{p}_k, 0) \tag{10.3}$$

Anm: Kugelfunktionen Y und Drehmatrizen D sind gemäß den Phasen von Edmonds [16] gewählt.

Das Tripel der Winkel (α, Θ_{pk}, φ_{pk}) wird mit ω bezeichnet. Da im Schwerpunktsystem alle Impulse in einer Ebene liegen, ist für alle Drehungen α gleich.

Mit Hilfe der Gleichungen (3.4) kann man sich leicht überzeugen, daß q_1'', p_1'' und die Skalarprodukte $\hat{p}_1'' \cdot \hat{q}_2''$ und $\hat{q}_1'' \cdot \hat{q}_2''$ nur von p_2'', q_2'' und dem Skalarprodukt $\hat{p}_2 \cdot \hat{q}_2''$ abhängen, nicht jedoch von ω. Die Funktionaldeterminante $\partial(\underline{p}_2'', \underline{q}_2'')/\partial(p_2'' \underline{q}_2'', \;)$ ist gleich 1. Somit ist die Integration über ω nur eine Integration über die Drehmatrizen. Berücksichtigt man die Orthogonalität der Drehmatrizen [16], so erhält man für die Winkelintegration allein

$$\int d\hat{p}_2'' d\hat{q}_2'' \, Y_{\ell_1'\lambda_1'}(\hat{p}_1'') Y_{\ell_2'\lambda_2'}(\hat{q}_1'') Y^*_{\ell_1''\lambda_1''}(\hat{p}_2'') Y^*_{\ell_2''\lambda_2''}(\hat{q}_2'') f(\hat{p}_2'' \cdot \hat{q}_2'') = 4\pi^{3/2} \hat{\ell}_1'' \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda\jmath\mu\nu} (\ell_1'\lambda_1'\ell_2'\lambda_2'|\jmath\nu)(\ell_1'\lambda_1'\ell_2'\lambda_2'|\jmath\mu) \frac{1}{\hat{\jmath}_2}$$

$$\cdot (\ell_1''\lambda\ell_2''0|\jmath\nu)(\ell_1''\lambda_1''\ell_2''\lambda_2''|\jmath\mu) \int d\hat{p}_2'' \hat{q}_2'' \, Y_{\ell_1'\lambda_1'}(\hat{p}_1'' \cdot \hat{q}_2'', 0) Y_{\ell_2'\lambda_2'}(\hat{q}_1'' \cdot \hat{q}_2'', 0) Y^*_{\ell_1''\lambda}(\hat{p}_2'' \cdot \hat{q}_2'', 0) f(\hat{p}_2'' \cdot \hat{q}_2'') \tag{10.4}$$

Setzt man nun dies in (10.2) ein, so liefert die Orthogonalität der Clebsch-Gordan-Koeffizienten gerade die Drehimpulserhaltung der Inhomogenität und bewirkt, daß nur Koeffizienten mit gleichem Gesamtdrehimpuls gekoppelt werden. D.h. auch der Kern der Integralgleichung erhält den Gesamtdrehimpuls und somit auch die Partialamplituden. Für W_{11} erhält man:

Anm.: $\hat{\underline{p}}$ bedeutet Einheitsvektor in Richtung von $\underline{p}$.

$$\langle p_1' q_1' l_1' l_2' L M | W_{11}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 L M \rangle = \frac{8\pi^{3/2}}{\hat{L}^2 q_1'^2} \sum_{l_1'' l_2'' \lambda_1 \lambda_2 \lambda} (l_1' \lambda_1 l_2' \lambda_2 | L' \lambda)(l_1'' \lambda l_2'' 0 | L' \lambda) \int p_1''^2 dp_1'' q_1''^2 dq_1'' \, S(q_1'' - q_1'^2) \cdot$$

(11.5a)

$$\cdot Y_{l_1' \lambda_1}(\hat{p}_1' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_2' \lambda_2}(\hat{q}_1'' \hat{q}_1' 0) Y^*_{l_1'' \lambda}(\hat{p}_1'' \hat{q}_1'' 0) \langle p_1' l_1' | t_1(z - \frac{\hbar^2 q_1'^2}{2m_1}) | p_1'' l_1'' \rangle \frac{\langle p_1'' l_1'' \lambda | p_1 l_1 \rangle \langle p_1 q_1 l_1 l_2 L M | W_{11}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 L M \rangle}{z - E''}$$

und für W_{21}:

$$\langle p_2' q_2' l_1' l_2' L M | W_{21}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 L M \rangle = -\delta_{LL'} \delta_{MM'} \frac{16\pi^{3/2} \hat{l}_2}{q_1 q_1' \hat{L}^2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda} (l_1' \lambda_1 l_2' \lambda_2 | L' \lambda)(l_1 \lambda_1 l_2 0 | L' \lambda) \int d\tau_1'' \, \delta(q_1''^2 - q_1'^2) \delta(q_2''^2 - q_2^2) \cdot$$

$$\cdot Y_{l_1' \lambda_1}(\hat{p}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_2' \lambda_2}(\hat{q}_2'' \hat{q}_1' 0) Y^*_{l_1 \lambda}(\hat{p}_1 \hat{q}_1 0) \langle p_2' l_1' | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2m_2}) | p_2'' l_1'' \rangle \frac{\langle p_2'' l_1'' \lambda | p_1 l_1 \rangle}{z - E''} t_1(z - \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m_1}) | p_1 l_1 \rangle + \quad (11.5b)$$

$$+ \frac{8\pi^{3/2}}{q_2' \hat{L}^2} \sum_{l_1'' l_2'' \lambda_1 \lambda_2 \lambda} \hat{l}_2'' (l_1 \lambda_1 l_2' \lambda_2 | L' \lambda)(l_1'' \lambda l_2'' 0 | L' \lambda) \int d\tau_1'' \, \delta(q_2''^2 - q_2'^2) \, Y^*_{l_1' \lambda_1}(\hat{p}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_2' \lambda_2}(\hat{q}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y^*_{l_1'' \lambda}(\hat{p}_1'' \hat{q}_1'' 0) \cdot$$

$$\cdot \langle p_2' l_1' | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2m_2}) | p_2'' l_2'' \rangle \frac{\langle p_2'' q_1 l_1'' \lambda_1 \lambda_2 L' M' | W_{11}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 L M \rangle}{z - E''}$$

Aus Gl. (10.5) ist ersichtlich, daß die Partialamplituden, wie die 2-Teilchenamplituden, nicht von den magnetischen Quantenzahlen abhängen. Da die Wechselwirkungen noch nicht spezifiziert sind, sind die Summen über die Bahndrehimpulse noch nicht beschränkt, d.h. es sind noch unendlich viele Amplituden miteinander gekoppelt. Um diese Gleichungen noch weiter zu vereinfachen, sollen skalare Wechselwirkungen angenommen werden, d.h. es soll gelten:

$$\langle p_\alpha' l | t_\alpha(z) | p_\alpha l \rangle = \delta_{l0} \langle p_\alpha' | t_\alpha(z) | p_\alpha \rangle \quad (10.6)$$

Berücksichtigt man diese Annahme in (10.5), so vereinfachen sich die Gleichungen wesentlich:

$$\langle p_1' q_1' L | W_{11}(z) | p_1 q_1 L \rangle = \frac{1}{q_1'} \int d\tau_2'' \, \delta(q_2''^2 - q_2'^2) \, P_L(\hat{q}_1'' \hat{q}_2'') \langle p_1' | t_1(z - \frac{\hbar^2 q_2''^2}{2m_1}) | p_1'' \rangle \frac{\langle p_1'' q_2'' L | W_{11}(z) | p_1 q_1 L \rangle}{z - E''}$$

Anm.: Hierbei ist das Integrationselement

$$d\tau_i' = p_i'^2 q_i'^2 dp_i' dq_i' d\hat{p}_i' d\hat{q}_i'$$

$$\langle p_2' q_2' L | W_{21}(z) | p_1 q_1 L \rangle = -\frac{1}{2\pi^2 q_1'} \int d\tau_1'' \delta(q_1''' - q_1') \delta(q_2''' - q_2'') P_L(\hat{q}_1'' \hat{q}_2''') \langle p_1' | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_1'^2}{2m_2}) | p_1 \rangle \frac{\langle p_1'' | t_1(z - \frac{\hbar^2 q_1'^2}{2m_1}) | p_1 \rangle}{z - E''} +$$

$$+ \int d\tau_1'' \frac{\delta(q_2''' - q_2'')}{q_2'} P_L(\hat{q}_1'' \hat{q}_2'') \langle p_2' | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2m_2}) | p_2'' \rangle \frac{\langle p_1'' q_1'' L | W_{11}(z) | p_1 q_1 L \rangle}{z - E''} \qquad (10.7)$$

Aus den Gleichungen (10.7) ist ersichtlich, daß auch für skalare Wechselwirkungen die Übergangsamplituden für alle Drehimpulse im allgemeinen ungleich null sind. Bei diesen Gleichungen ist wegen der δ-Funktion nur noch über zwei Variablen numerisch zu integrieren. Aber auch dies ist für eine überschaubare Lösung der Gleichungen noch zu viel [+], da noch Integrationen um Polstellen auszuführen sind.

Es soll jetzt noch kurz gezeigt werden, wie ein Separationsansatz der Form

$$\langle p' | t(z) | p \rangle = f'(p') \hat{\tau}(z) f(p) \qquad (10.8)$$

die Gleichungen weiter vereinfacht.

Die Integrationsvariablen in (10.2) wurden so gewählt, daß sich der Separationsansatz (10.8) direkt auf die 3-Teilchen-Amplituden überträgt.

Setzt man (10.8) in (10.7) ein, so sieht man, daß folgender Ansatz für die Partialamplituden möglich ist.

$$\langle p_\alpha' q_\alpha' L | W_{\alpha 1}(z) | p_1 q_1 L \rangle = f_\alpha'(p_\alpha') \tilde{W}_{\alpha 1}^L(q_\alpha', q_\alpha; z) f_1(p_1) \qquad (10.9)$$

[+] Anm.: Die freie Greensche Funktion $G_0(z)$ hat an der Gesamtenergie einen Pol, falls man sich oberhalb der 3-Teilchen-Aufbruchschwelle befindet. Die T-Matrix hat an allen gebundenen Zuständen Verzweigungspunkte vom Typ $z^{-1/2}$.

Mit diesem Ansatz erhält man nun folgende Gleichungen

$$\tilde{W}^L_{11}(q_1' q_1; z) = \frac{\hat{\tau}_1}{q_1'}\left(z - \frac{\hbar^2 q_1'^2}{2n_1}\right)\int dq_1'' q_1''^2 \left\{\int dp_1'' d\hat{p}_1'' \hat{q}_1'' p_1''^2 \delta(q_1''^2 - q_1'^2) \frac{P_L(\hat{q}_1'' \cdot \hat{q}_2'') f_1(p_1'') f_2'(p_2'')}{z - \frac{\hbar^2 p''^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 q''^2}{2n}}\right\} \tilde{W}^L_{21}(q_2'', q_1; z).$$

(10.10)

$$\tilde{W}^L_{21}(q_2', q_1; z) = -\frac{2\hat{\tau}_2}{q_2' q_1}\left(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2n_2}\right)\hat{\tau}_1\left(z - \frac{\hbar^2 q_1^2}{2n_1}\right)\int d\tau_1'' \delta(q_1''^2 - q_1^2)\delta(q_2''^2 - q_2'^2) \frac{P_L(\hat{q}_1'' \cdot \hat{q}_2''') f_2(p_2'') f_1'(p_1'')}{z - E''} +$$

$$+ \frac{\hat{\tau}_2}{q_2'}\left(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2n_2}\right)\int dq_1'' q_1''^2 \left\{\int dp_1'' d\hat{p}_1'' \hat{q}_1'' p_1''^2 \delta(q_2''^2 - q_2'^2) \frac{P_L(\hat{q}_1'' \hat{q}_2''') f_2(p_2'') f_1'(p_1'')}{z - \frac{\hbar^2 p''^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 q''^2}{2n}}\right\} \tilde{W}^L_{11}(q_1'', q_1; z)$$

Diese Gleichungen sind einer numerischen Lösung zugänglich. Es sind jetzt nur noch zwei Gleichungen in jeweils einer Variablen. Der Kern ist jedoch erst durch eine Integration zu erhalten. Falls diese Integration nicht analytisch durchgeführt werden kann, müssen weitere Näherungen gemacht werden, wie sich beim nächsten Beispiel zeigen wird.

Zu den Gleichungen von Sandhas et. al. [4] gelangt man, wenn man statt (10.9) folgenden Ansatz macht:

$$\langle p_\alpha' q_\alpha' L | W_{\alpha 1}(z) | p_1 q_1 L \rangle = f_\alpha'(p_\alpha') \hat{\tau}_\alpha\left(z - \frac{\hbar^2 q_\alpha'^2}{2n_\alpha}\right) \bar{W}^L_{\alpha 1}(q_\alpha', q_1; z) f_1(p_1) \hat{\tau}_1\left(z - \frac{\hbar^2 q_1^2}{2n_1}\right) \qquad (10.9')$$

11.) Die Streuung von Deuteronen an He^4 als 3-Teilchen-Problem

Will man nun die Verfahren aus den vorangegangenen Kapiteln an einem realistischen Beispiel anwenden und die Ergebnisse mit dem Experiment vergleichen, so stellt man fest, daß nur sehr wenig Probleme zur Wahl stehen. Denn einerseits sollte das Problem so einfach sein, daß es sich gut numerisch behandeln läßt, d.h. es sollte ein Teilchen den Spin 0 haben und die jeweiligen 2-Teilchen-Wechselwirkungen nur wenige nichtverschwindende Partialamplituden besitzen. Andererseits sollten die Streuphasen der 2-Teilchen-Wechselwirkungen gut bekannt sein, um die T-Matrizen anpassen zu können. Und schließlich sollten gute experimentelle Daten vorliegen, um die Rechnungen vergleichen zu können.

Ein Problem, das alle diese Forderungen sehr gut erfüllt, ist die Streuung von Deuteronen an Helium. Wegen seiner hohen Bindungsenergie ($\sim$20 MeV) kann das α-Teilchen als strukturlos betrachtet werden für Laborenergien unter 10 MeV. Außerdem ist es spinlos. Die Streuphasen für Proton-Helium- und Neutron-Helium-Streuung sind experimentell wohl bekannt, sodaß die entsprechenden t-Matrizen an ihnen angepaßt werden können. Bei der oben angegebenen Beschränkung der Laborenergie können die Streuphasen von d-Wellen und höheren vernachläßigt werden. Man kann sich also auf drei Partialamplituden beschränken: $s_{1/2}$, $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$. Beim Neutron-Proton-System kann man sich sogar auf die ^3S-Amplitude allein beschränken.

Weiterhin sind die Streuphasen für die Deuteron-Helium-Streuung aus Polarisationsmessungen, sehr gut bekannt (Haeberli [17]), so daß die Ergebnisse mit dem Experiment verglichen werden können. Somit eignet sich dieses Beispiel besonders, die angeführten Näherungen zu testen. Vergleicht man Neutron-Helium- und Proton-Helium-Streuphasen, so ergibt sich, daß diese ungefähr gleich sind. Man kann also Coulomb-Effekte für eine erste Berechnung vernachläßigen und Neutron und Proton im Isospinformalismus behandeln. Diese Näherung wurde von Shanley [18] am selben Problem mit gutem Erfolg durchgeführt.

Zwar sind durch den Isospinformalismus nur noch zwei Gleichungen miteinander verkoppelt, jedoch wird die Struktur etwas komplizierter und es muß das Pauli-Prinzip berücksichtigt werden.

Da bereits in dem Modellbeispiel des vorigen Kapitels alle Einzelschritte vorgeführt wurden, soll hier nur die Partialwellenanalyse angegeben werden.

Für W_{11} ergibt sich die gleiche Struktur, wie in Gl. (10.5a)

$$\langle p_1' q_1' l_1' l_2' 1 | W_{11}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 1 \rangle = \frac{2\pi}{\pi} \sum_{l_1'' l_2'' \nu} (l_1' \nu l_2'' 0 | l_2'' \nu) \int dz_2'' \, \delta(q_1'^2 - q_1''^2) Y^*_{l_2'' \nu}(\hat{q}_1'' \hat{q}_2'' 0) Y_{l_1'' \nu}(\hat{q}_1'' \hat{q}_2'' 0)$$

$$\times \langle p_1' | t_{l_1'}(z - \frac{k^2 q_1^2}{2m}) | p_1'' \rangle \frac{\langle p_1'' q_2'' l_1'' l_2'' 1 | W_{21}(z) | p_1 q_1 l_1 l_2 1 \rangle}{z - E''} \qquad (11.1)$$

Die Kugelfunktionen sind reell, da der Azimutwinkel gleich 0 ist. Somit vereinfacht sich die Relation [16]

$$Y_{l-m}(\theta,\varphi) = (-)^m \, Y^*_{lm}(\theta,\varphi)$$

zu

$$Y_{l-m}(\theta,0) = (-)^m \, Y_{lm}(\theta,0) \qquad (11.2)$$

Für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten gilt folgende Symmetriebeziehung

$$(j_1 -m_1 \; j_2 -m_2 \mid j_3 -m_3) = (-)^{j_1+j_2-j_3} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_3 m_3) \qquad (11.3)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (11.2) und (11.3) läßt sich zeigen, daß $l_1'' + l_2'' + l_2'$ gerade sein muß. Diese Relation entspricht der Paritätserhaltung im 2-Teilchen-Fall.

Für W_{21} ergibt sich eine kompliziertere Gleichung

$$\langle p_2' q_2' l_1' l_2' L' S' J | W_{21}(z) | p_1 q_1 0 l_2 l_2 1 J \rangle = 8\pi\sqrt{6}\, \hat{S}' \hat{L} \hat{l}_1' \hat{J} \sum_{I e \nu} \hat{I}^3 \hat{e}^6 \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2} e \\ I I 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{2} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2} e \\ s' 1 e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (l_2' l_2') e \\ l_2' l_2' 0 \\ L' l_2 e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' l_2 e \\ s' 1 e \\ J J 0 \end{Bmatrix} \cdot$$

$$(l_1' \nu l_2' -\nu | l_2 0) \int d\tau_1'' \frac{\delta(q_2'' - q_2)}{q_2'} \frac{\delta(q_1'' - q_1)}{q_1} Y_{l_2' -\nu}(\hat{q}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_1' \nu}(\hat{p}_2'' \hat{q}_1'' 0) \langle p_2' l_1' I | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_2''^2}{2\mu_2}) | p_2'' l_1' I \rangle \frac{\langle p_2'' l_1' I | t_1(z - \frac{\hbar^2 q_1^2}{2\mu_1}) | p_1 \rangle}{z - E''} +$$

$$+ 4\pi\sqrt{6}\, \hat{S}' \hat{L}' \hat{l}_2' \hat{J} \sum_{l_1'' I e \nu} \hat{I}^3 \hat{e}^6 (l_1' \nu l_2' -\nu | l_2'' 0) \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2} e \\ I I 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{2} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2} e \\ s' 1 e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ l_2' l_2' 0 \\ L' l_2'' e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' l_2'' e \\ s' 1 e \\ J J 0 \end{Bmatrix} \int d\tau_1'' \frac{\delta(q_2'' - q_2')}{q_2'} \cdot \qquad (11.4)$$

$$\cdot Y_{l_1' \nu}(\hat{p}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_2' -\nu}(\hat{q}_2'' \hat{q}_1'' 0) \langle p_2' l_1' I | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_2''^2}{2\mu_2}) | p_2'' l_1' I \rangle \frac{\langle p_2'' q_1'' 0 l_2'' l_2'' 1 J | W_{11}(z) | p_1 q_1 0 l_2 l_2 1 J \rangle}{z - E''} +$$

$$+ \sqrt{2}\, \hat{S}' \hat{L} \hat{l}_2' \hat{J} \sum_{I s'' L''} (-1)^{1-s''+l_1} \hat{I}^3 \hat{S}'' \hat{L}'' \hat{e}^6 \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2} e \\ I I 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{2} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{2} e \\ s' s'' e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ l_2' l_2' 0 \\ L' L'' e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' L'' e \\ S' S'' e \\ J J 0 \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \int \frac{\langle p_2' l_1' I | t_2(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2\mu_2}) | p_2'' l_1' I \rangle \langle p_2'' q_2' l_1' l_2' L'' S'' J | W_{21}(z) | p_1 q_1 0 l_2 l_2 1 J \rangle}{z - E''} p_2''^2 dp_2'' .$$

Ebenso wie in (11.1) kann man auch hier schließen, daß $l_1' + l_2' + l_2$ bzw. $l_1' + l_2' + l_2''$ gerade sein müssen, damit die einzelnen Ausdrücke nicht verschwinden.

In den Faddeev-Gleichungen sind immer verschiedene $W_{\alpha\beta}$ miteinander gekoppelt. In (11.4) jedoch taucht W_{21} zusätzlich auf der rechten Seite unter dem Integral auf. Dies liegt daran, daß wegen der Gleichheit von Neutron-Helium- und Proton-Helium-Wechselwirkung, W_{31} durch W_{21} ersetzt werden kann.

Diese Gleichungen (11.4) sind für eine numerische Lösung noch zu kompliziert. Für den einfachsten Fall, nämlich J = 0 kann man sich davon überzeugen, daß 9 Matrixelemente möglich sind, die teilweise miteinander verkoppelt sind.

12.) Eine separable Approximation der T-Matrix für ein Kastenpotential und Anpassen der Potentialparameter an die Neutron-Proton- und Neutron-Helium-Wechselwirkung

Das Verfahren von Weinberg [6], das wie erwähnt, gute separable Approximationen für die T-Matrix liefert, soll nun für ein spezielles Potential angewendet werden. Das Verfahren liefert umso bessere Ergebnisse, je genauer die verwendeten Wellenfunktionen mit den exakten übereinstimmen. Da beim Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

die exakten Lösungen bekannt sind, sollten die Ergebnisse gut mit der exakten T-Matrix übereinstimmen. Dies hat Reiner für l=0 gezeigt.

Die Wellenfunktion ist innerhalb des Potentials durch sphärische Besselfunktionen j_l und außerhalb durch sphärische Hankelfunktionen erster Art h_l^+ gegeben. Transformiert man diese jeweils in den Impulsraum, so erhält man verallgemeinerte Wronskideterminanten:

$$(\alpha,\gamma)_l \equiv \left[\gamma a\, j_l(\alpha a)\, j_{l-1}(\gamma a) - \alpha a\, j_{l-1}(\alpha a)\, j_l(\gamma a)\right] / (\alpha^2 a^2 - \gamma^2 a^2)$$

$$(\alpha,\gamma^+)_l \equiv \left[\gamma a\, j_l(\alpha a)\, h^+_{l-1}(\gamma a) - \alpha a\, j_{l-1}(\alpha a)\, h^+_l(\gamma a)\right] / (\alpha^2 a^2 - \gamma^2 a^2) \qquad (12.1)$$

Hierbei ist a die Reichweite des Potentials; α und γ bezeichnen die jeweiligen Wellenzahlen.

Als Approximation für die T-Matrix erhält man mit diesen Definitionen für spinlose Teilchen

$$T^l(p',p;z) = \frac{2i}{\pi}\, \alpha^2 V \omega^2 (p',\beta)_l (p,\beta)_l / K(\beta,K^+)_l (K,\beta)_l \qquad (12.2)$$

Hierbei ist $\omega^2 = a^2 \frac{2\mu}{\hbar^2} V$, $\beta^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(z+V)$ und $K^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} z$. (12.3)

Für die Neutron-Proton-Wechselwirkung kann bereits diese T-Matrix zur Beschreibung herangezogen werden. Es müssen nur noch a und V so gewählt werden, daß die Niederenergie-Streudaten richtig wiedergegeben werden. Hierzu konnten Potentialparameter von Preston [19] genommen werden.

Bei der Neutron-Helium-Streuung sind die Kanäle $p_{1/2}$ und $p_{3/2}$ stark verschieden. Daher muß eine spinabhängige Wechselwirkung eingeführt werden. Eine L-S-Kraft beschreibt die Experimente. Um das Problem nicht unnötig zu komplizieren, wurde für die Radialabhängigkeit der L-S-Kraft ebenfalls ein Kastenpotential - gleicher Reichweite - gewählt.

Hierzu erhält man als separable Approximation für die T-Matrix

$$T_{l,l}(k',k;z) = \frac{2}{\pi} a^3 V_{ls} \frac{j_l(k'a) j_l(\beta_{ls} a)}{k(\beta_{ls}, K^+)_l (K, \beta_{ls})_l} \qquad (12.4)$$

Hierbei ist $V_{lSJ} = V_0 + V_{LS} \cdot (J(J+1)-l(l+1)-S(S+1))$, alle anderen Relationen ergeben sich aus (12.3), wenn dort V durch V_{lSJ} ersetzt wird.

Die Anpassung der Parameter a, V_0 und V_{LS} an die Streuphasen erfolgte teils auf der Siemens 2002 des Siemens Rechenzentrums, teils auf der CDC-3300 der Universität Erlangen-Nürnberg.

Gute Übereinstimmung mit den experimentellen Streuphasen ergab sich für folgende Parameterwerte:

$$V_0 = 41.6 \text{ MeV}, \quad V_{LS} = 5.4 \text{ MeV} \text{ und } a = 2.33 \text{ fm}.$$

In Figur 4 sind die aus 12.4 erhaltenen Streuphasen dargestellt. Als Vergleich wurden Streuphasen nach Satchler [20] gewählt. Die $\delta_0^{1/2}$-Streuphase stimmt bis auf $\pm$ 0.1° mit den Werten von Satchler überein, deshalb wurden keine Punkte angegeben.

3.) Behandlung des Deuteron-Helium-Systems mit dieser T-Matrix

it den im vorangehenden Kapitel erhaltenen T-Matrixelementen oll nun das Deuteron-Helium-System angegangen werden. Es soll unächst noch einmal kurz skizziert werden, was berechnet wer- en muß. Es sollten die Streuphasen der elastischen Deuteron- elium-Streuung mit den experimentellen Werten verglichen wer- en. Ein Vergleich von Streuphasen ist günstiger, als ein Ver- leich von Wirkungsquerschnitten oder Polarisationen, da bei en Streuphasen nur jeweils ein Kanal eingeht und man somit ie Kanäle einzeln vergleichen kann.

ie Streuphasen hängen mit der 2-Teilchen-S-Matrix zusammen ber:

$$S_l^J = e^{2i\delta_l^J} ;$$

ie S-Matrix wiederum ist durch (5.6) gegeben. Es wird also ur ein Teil von W_{11} benötigt.

m die Probleme, die bei der Berechnung von W_{11} auftreten, zu eigen, genügt es, den einfachsten Kanal, nämlich Gesamtdreh- mpuls 0, zu behandeln. Alle anderen sind analog aufgebaut.

ie allgemeinen Gleichungen (11.1) und (11.4) vereinfachen sich ei J = 0 zu

$$\langle p_1' q_1' 01110 | W_{11}(z) | p_1 q_1 01110 \rangle = \frac{8\pi}{3} \sum_{l_1'' l_2'' \nu} (l_1'' \nu l_2'' 0 | 11\nu) \int d\tau_2'' \frac{\delta(q_1'^2 - q_1''^2)}{q_1'} Y_{1\nu}(\hat{q}_1'' \hat{q}_{21}'') Y_{l_1''\nu}(\hat{p}_1'' \hat{q}_{21}'' 0)$$

$$\langle p_1' | t_1(z - \frac{\hbar^2 q_1''^2}{2m_1}) | p_1'' \rangle \langle p_2'' q_2'' l_1'' l_2'' 110 | W_{21}(z) | p_1 q_1 01110 \rangle \qquad (13.1a)$$

$$Z - E''$$

$$\langle p_2' q_2' l_1' l_2' 1101 | W_{21}(z) | p_1 q_1 01110 \rangle = 8\pi\sqrt{6}\,\hat{l}_2' \sum_{I\varepsilon\nu} \hat{I}^3 \hat{e}^5 \begin{Bmatrix} l_1' l_1 e \\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} e \\ I\,I\,0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}0 \\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}e \\ 1\,1\,e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ l_2' l_2' 0 \\ 1\,1\,e \end{Bmatrix} \langle l_1' \nu\, l_2' {-}\nu | 110 \rangle \cdots$$

$$\int d\tau_1'' \frac{\delta(q_2''^2 - q_2'^2)}{q_2'} \frac{\delta(q_1''^2 - q_1^2)}{q_1} Y_{l_1'\nu}(\hat{p}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_2'-\nu}(\hat{q}_2'' \hat{q}_1'' 0) \langle p_2' l_1' I | t_2\left(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2m_2}\right) | p_2'' l_1' I \rangle \frac{\langle p_2'' l_1' I | t_1\left(z - \frac{\hbar^2 q_1^2}{2m_1}\right) | p_1 \rangle}{z - E''} +$$

$$+ 8\pi\sqrt{6}\,\hat{l}_1' \sum_{I\varepsilon\nu} \hat{I}^3 \hat{e}^5 \langle l_1' \nu\, l_2' {-}\nu | 110 \rangle \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} e \\ I\,I\,0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}0 \\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}e \\ 1\,1\,e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ l_1' l_1' 0 \\ 1\,1\,e \end{Bmatrix} \int d\tau_1'' \frac{\delta(q_2''^2 - q_2'^2)}{q_2'} Y_{l_1'\nu}(\hat{p}_2'' \hat{q}_1'' 0) Y_{l_2'-\nu}(\hat{q}_2'' \hat{q}_1'' 0) \cdot$$

$$\cdot \langle p_2' l_1' I | t_2\left(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2m_2}\right) | p_2'' l_1' I \rangle \frac{\langle p_1'' q_1'' 01110 | W_{11}(z) | p_1 q_1 01110 \rangle}{z - E''} + \qquad (13.1b)$$

$$+ \sqrt{6}\,\hat{l}_2' \sum_{I S'' e} (-)^{1-S''+l_1'} \hat{I}^3 \hat{S}'' \hat{e}^5 \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} e \\ I\,I\,0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}0 \\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}e \\ 1\,S''e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' l_1' e \\ l_2' l_2' 0 \\ 1\,S''e \end{Bmatrix} \int \langle p_2' l_2' I | t_2\left(z - \frac{\hbar^2 q_2'^2}{2m_2}\right) | p_2'' l_1' I \rangle \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{z - E''} \langle p_2'' q_2' l_1' l_2' S'' S'' 0 | W_{21}(z) | p_1 q_1 01110 \rangle\, p_2''^2 dp_2''.$$

Aus der Gleichung für $W_{11}(z)$ folgt, daß nur solche Elemente von W_{21} benötigt werden, bei denen $l_1' + l_2'$ ungerade ist. Damit ist in der letzten Zeile von (13.1b) S" auf 1 festgelegt. Zur Bestimmung von W_{11} sind also nur folgende Matrixelemente von W_{21} nötig: ($l_1' = 0$, $l_2' = 1$), ($l_1' = 1$, $l_2' = 0$) und ($l_1' = 1$, $l_2' = 2$). Durch Einsetzen der T-Matrizen (12.2 bzw. 12.4) erkennt man, daß die selben Separationsansätze wie im Kap. 10, auch hier für $W_{\alpha\beta}$ gemacht werden können. Im Kern der neuen Integralgleichungen ist noch über p und den Winkel zu integrieren. Für eine Integration steht die δ-Funktion zur Verfügung. Da alle Integrationen vom selben Typ sind, sei für die verbleibende Integration nur ein Beispiel angegeben.

$$\int_{(\frac{4}{5}q_2''-q_1')^2}^{(\frac{4}{5}q_2''+q_1')^2} dp_2''^2 \; P_1(\hat{p}_2''\cdot\hat{q}_1'')(p_1'',\beta_1')_0 (p_2'',\beta_2''\tfrac{1}{2})_1 / (z - \frac{\hbar^2 p_2''^2}{2\mu_2} - \frac{\hbar^2 q_2''^2}{2m_2}) \qquad (13.2)$$

Hierbei ist der Winkel $\hat{p}_2''\cdot\hat{q}_1''$ und p_1'' durch die Beträge von $p_2''^2$, q_2'' und q_1' auszudrücken. Die Integration ist nur numerisch ausführbar.

14.) Zwei Lösungsansätze für das Deuteron-Helium-System

Zu Beginn der numerischen Rechnung, war die Leistungsfähigkeit des zur Verfügung stehenden Computers, eine CDC-3300, nur ungefähr bekannt.

Es wurde deshalb nach Möglichkeiten gesucht, schnell einen Überblick zu erhalten, wie sich die Lösungen verhalten.

Als erstes wurde hierzu ein nochmaliger Separationsansatz gewählt und zwar wurden die Integrale vom Typ (13.2) so approximiert, daß sich ein in q separabler Kern ergab. Die dann noch auszuführende Integration (Integration um Polstellen von t und g_0) über q wurde mit der Rechenmaschine durchgeführt. Der Rechenzeitbedarf für eine Streuphase und eine Energie betrug ungefähr 30 Minuten. Für die p-Wellen Streuphase ergab sich gute Übereinstimmung mit dem Experiment (vgl. hierzu Fig. 5). In ihr sind die d-Wellen Streuphasen δ_1^J für J = 0, 1, 2 aufgetragen. Die experimentellen Werte sind von Haeberli [17]. Er gibt keine Fehler an. Die berechneten Streuphasen sind wegen der Rundungsfehler auf etwa 1^o genau.

Für s- und d-Wellen ergab sich keine Übereinstimmung, vgl. hierzu Fig. 6. In Figur 6 ist als repräsentatives Beispiel die Streuphase δ_2^2 aufgetragen. Die mit der separablen Approximation (durchgezogene Kurve) berechneten Werte zeigen keine Ähnlichkeit mit den experimentellen. Dies liegt daran, daß die hier verwendete separable Approximation eine Entwicklung der

Wronski-Determinanten $(p,\beta)_l$ nach Produkten von Besselfunktionen ansteigender Ordnung enthält. Diese Entwicklung läßt sich für $l = 1$ durch einen Term im benötigten Energiebereich approximieren, für $l = 0$ sind jedoch mehrere Terme nötig. Eine Mitnahme von nur je 2 Termen hätte etwa eine Verzehnfachung der Rechenzeit bedeutet und wurde daher nicht durchgeführt.

Um dieses Ergebnis zu verbessern, wurde versucht, die Gleichungen durch Iteration zu lösen. Hierzu wurde in (13.1b) $W_{11} = 0$ gesetzt und aus den Gleichungen W_{21} berechnet. Diese Ergebnisse wurden in (13.1a) eingesetzt um eine erste Approximation für W_{11} zu erhalten.

Für p-Wellen ergab bereits die erste Iteration gute Übereinstimmung mit den vorherigen Ergebnissen. Sie liegen innerhalb der Zeichengenauigkeit. Für s- und d-Wellen ergab die erste Iteration noch keine Übereinstimmung. Für ein Beispiel, nämlich δ_2^2, sind die Ergebnisse in Fig. 6 dargestellt (gestrichelte Kurve). Der Rechenzeitaufwand betrug ca. 15 Minuten pro Streuphase. In derzweiten Iteration treten zwar nur ca. 4 mal soviel Terme auf, es müssen jedoch mehrfache Integrale ausgewertet werden. Aus diesem Grund steigt der Rechenaufwand ganz beträchtlich an (ca. Faktor 20 bis 50). Grobe Abschätzungen bei 5 MeV ergaben, daß in der zweiten Iteration die einzelnen Terme von etwa gleicher Größenordnung wie in erster Iteration sind. Daraus kann man schließen, daß der Wert der berechneten Streuphase ungefähr 45° beträgt, verglichen mit einem experimentellen Wert von 90°. Die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens ist also nicht besonders gut. Auf großen Rechenmaschinen [+)] läßt sich die zweite Iteration jedoch leicht rechnen.

Weitere Näherungen wurden mit den Faddeev-Gleichungen nicht mehr unternommen. Bei einem separablen Ansatz für die T-Matrix mit mehr als einem Term für jeden Bahndrehimpulswert sind die

---

[+)] Anm.: Die CDC-6600 am CERN beispielsweise ist einen Faktor 100 schneller als die hier verwendete CDC-3300.

Faddeev-Gleichungen ungünstiger als diejenigen von Sandhas. Die Faddeev-Gleichungen müssen nämlich erst noch teilweise entkoppelt werden, was auf die Lösung von Gleichungssystemen hinausläuft. Bei Sandhas [4] ist diese Entkopplung bereits enthalten. Er geht nämlich von separablen T-Matrizen aus und behandelt den nicht-separablen Anteil als Störung. Wie in Kap. 10 erwähnt wurde, kommt man bei einem geeigneten Ansatz für $W_{\alpha\beta}$ in einfachen Fällen direkt von den Faddeev-Gleichungen zu den Sandhas-Gleichungen. Da bei den Sandhas-Gleichungen die Entkopplung bereits durchgeführt ist, sollen diese im nächsten Kapitel dazu verwendet werden, um mittels einer weiteren Approximation zu versuchen, das Deuteron-Helium-Problem zu lösen.

15.) K-Matrix-Approximation der Sandhas-Gleichungen

Die Gleichungen von Sandhas et. al. [4]

$$Q_{\alpha\beta} = Z_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma\neq\alpha} Z_{\alpha\gamma} t_\gamma Q_{\gamma\beta} \tag{15.1}$$

sind äquivalent mit den Faddeev-Gleichungen. Jedoch unterscheidet sich ihre Struktur von der der Faddeev-Gleichungen. Dies wird deutlich, wenn man die Faddeev-Gleichungen in der folgenden Form darstellt:

$$Q_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\neq\alpha} T_\alpha G_o Q_{\gamma\beta} \tag{15.2}$$

Obwohl die Gleichungen (15.1) und (15.2) äquivalent sind, sind die Gleichungen (15.1) bereits in einer Form, die sich unmittelbar als System von Lippmann-Schwinger-Gleichungen für mehrere Kanäle interpretieren läßt. Dabei sind die $Z_{\alpha\beta}$ als Potentiale und die t_γ als Propagatoren (Greensfunktionen) zu deuten.

Diese Analogie legt es nahe, den K-Matrix-Formalismus zur Lösung heranzuziehen (Rodberg [5]): Dabei wird eine Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.2) in zwei Gleichungen zerlegt. Mit der bekannten Relation:

$$\frac{1}{E-h_0+i\varepsilon} = \frac{P}{E-h_0} - i\pi\delta(E-h_0) \tag{15.3}$$

zerfällt die Lippmann-Schwinger-Gleichung [5] in die beiden Integralgleichungen:

$$k = V + V\frac{P}{E-h_0}\,k \tag{15.4a}$$

und

$$t = k - i\pi k\,\delta(E-h_0)t \tag{15.4b}$$

In einer Partialwellenanalyse reduziert sich Gl. (15.4b) auf einen Satz algebraischer Gleichungen. Dies ist möglich, weil man sich im K-Matrix-Formalismus auf die Energieschale beschränkt (vgl. die δ-Funktion in Gl. (15.4b)).

Der Vorteil dieser Gleichungen liegt darin, daß jede Approximation von k eine T-Matrix liefert, die die Unitaritätsrelation (2.5) erfüllt.

Überträgt man diesen Formalismus auf die Gleichungen (15.1), so muß man alle Pole des Propagators t_γ, d.h. also alle gebundenen Zustände und eventuell auch die möglichen Resonanzen, nach Gl. (15.3) berücksichtigen.

Als einfachste Näherung bietet sich an, die Hauptwertintegration in (15.4a) gleich Null zu setzen. Mit dieser Approximation haben Sandhas et. al. [21] bei der Deuteron-Neutron-Streuung recht gute Erfolge erzielt.

Anm.: Die Gleichung (15.4b) wird Heitler'sche Dämpfungsgleichung genannt.

In der vorliegenden Arbeit wurde diese Näherung auf die in Kap. 12 erhaltenen T-Matrizen des Deuteron-Helium-Systems angewendet. In Fig. 6 sind die Ergebnisse für die δ^2_2-Streuphase dargestellt (punktierte Kurve). Wie man sieht, läßt sich keine Übereinstimmung mit den experimentellen Werten finden.

Der Grund dafür ist, daß die einzelnen Neutron-Helium-Kanäle im allgemeinen nicht von Poltermen dominiert werden. Lediglich im $p_{3/2}$-Kanal liegt eine Resonanz vor. Somit werden also in den Sandhas Gleichungen die $p_{1/2}$- und $s_{1/2}$-Kanäle vernachläßigt. Dadurch wird die Struktur der Gleichungen stark verändert; somit erscheint diese Näherung zur Beschreibung des Deuteron-Helium-Problems nicht geeignet.

Bei dem von Sandhas et. al. [21] bearbeiteten Deuteron-Neutron-System hingegen, wird die Struktur der Gleichungen nicht verändert. Dies liegt daran, daß drei Nukleonen beteiligt sind, die im Isospinformalismus als ununterscheidbar betrachtet werden können. Hierdurch haben sich die Gleichungen bereits so stark vereinfacht, daß die Approximation keine Strukturänderung bewirkt.

16.) Diskussion

Die genauere Untersuchung der verwendeten T-Matrix zeigt, daß diese sowohl für kleine Energien, d.h. im Bereich $-10\ \text{MeV} \leq z \leq 10\ \text{MeV}$ als auch asymptotisch für $|z| \to \infty$ mit der exakten übereinstimmt. Im Zwischengebiet jedoch treten Pole auf, die keinen physikalischen Zuständen entsprechen.

Wie Osborn [22] gezeigt hat, ist dies eine allgemeine Eigenschaft der speziellen Weinberg-Approximation bei der die einzelnen Partialamplituden nur durch einen einzigen separablen Term angenähert werden (vgl. Gl. (12.4)). Doch verschwinden diese nichtphysikalischen Pole in dem Maße, wie man mehr Terme zur Approximation der T-Matrix verwendet.

Allerdings bleibt das Kastenpotential für eine numerische Rechnung mit dem zur Verfügung stehenden Computer wenig geeignet. Denn selbst wenn die nicht-physikalischen Pole beseitigt werden, lassen sich die Integrationen vom Typ (13.2) nur numerisch auswerten.

Darum sind weitgehende Näherungen nur unter erheblichem Zeitaufwand durchführbar. So hat z.B. Shanley [18] mit einer leicht modifizierten Wechselwirkung, jedoch unter sonst gleichen physikalischen Annahmen das Deuteron-Helium-System behandelt und gute Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt. Allerdings mußte er die numerischen Rechnungen auf einer CDC-6600 durchführen.

Yaes [23] zeigt, wie man auch solche T-Matrizen, die nicht von Poltermen dominiert werden, behandeln kann; diese Methode führt auf leicht modifizierte Sandhas-Gleichungen. Ob diese Gleichungen jedoch einer numerischen Behandlung zugänglich sind, muß erst noch untersucht werden. Diese Untersuchung kann am zur Verfügung stehenden Computer (CDC-3300) aus Platz- und Zeitmangel nicht durchgeführt werden.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, wie man die Faddeev-Gleichungen auf Teilchen mit Spin erweitern kann. Als Beispiel wurde die Deuteron-Helium-Streuung behandelt. Für die einzelnen Wechselwirkungen (n-α, p-α und n-p) wurden Kastenpotentiale angenommen. Für die T-Matrizen, die in den Faddeev-Gleichungen benötigt werden, wurde eine separable Approximation nach Weinberg gewählt. Die Potentialparameter wurden so bestimmt, daß die separablen T-Matrizen die experimentellen Streuphasen wiedergeben.

Die sich mit diesen T-Matrizen ergebenden Gleichungen sind für eine direkte numerische Behandlung zu kompliziert. Ein nochmaliger Separationsansatz für den Kern der Integralgleichung gab bereits die experimentellen p-Wellen-Streuphasen gut wieder, jedoch s- und d-Wellen-Phasen nicht. Als systematischer Lösungsweg wurde anschließend eine Iteration der Gleichungen durchgeführt. In erster Iteration werden wiederum die p-Wellen-Streuphasen gut wiedergegeben, s- und d-Wellen-Streuphasen jedoch nicht. Bei vertretbarem Aufwand war es leider nur möglich, bei einigen ausgewählten Energien den Beitrag der zweiten Iteration anzugeben. Dabei zeigt es sich, daß die experimentellen Streuphasen, auch für s- und d-Wellen, größenordnungsmäßig erreicht werden. Um genauere Aussagen über das Drei-Teilchen-System zu machen, insbesonders über die Art des zu verwendenden Potentials, sind numerische Rechnungen von wesentlich größerem Umfang erforderlich. Solche Rechnungen sind jedoch bei den vorhandenen Gegebenheiten nicht durchführbar.

Legenden

Figur 1: Graphische Darstellung der Bornschen Reihe der 2-Teilchen-T-Matrix.

Figur 2: Graphische Darstellung der Bornschen Reihe der 3-Teilchen-T-Matrix.

Figur 3: Graphische Darstellung der Bornschen Reihe einer Lösung der Faddeev-Gleichungen.

Figur 4: Vergleich der Neutron-Helium-Streuphasen für die separable Approximation des Kastenpotentials (Kurven) mit Werten nach Satchler (Punkte).

Figur 5: Deuteron-Helium-Streuphasen berechnet mittels zweimaliger Separation. Experimentelle Werte von Haeberli.

Figur 6: Deuteron-Helium-Streuphasen. Vergleich verschiedener Approximationen mit experimentellen Werten.

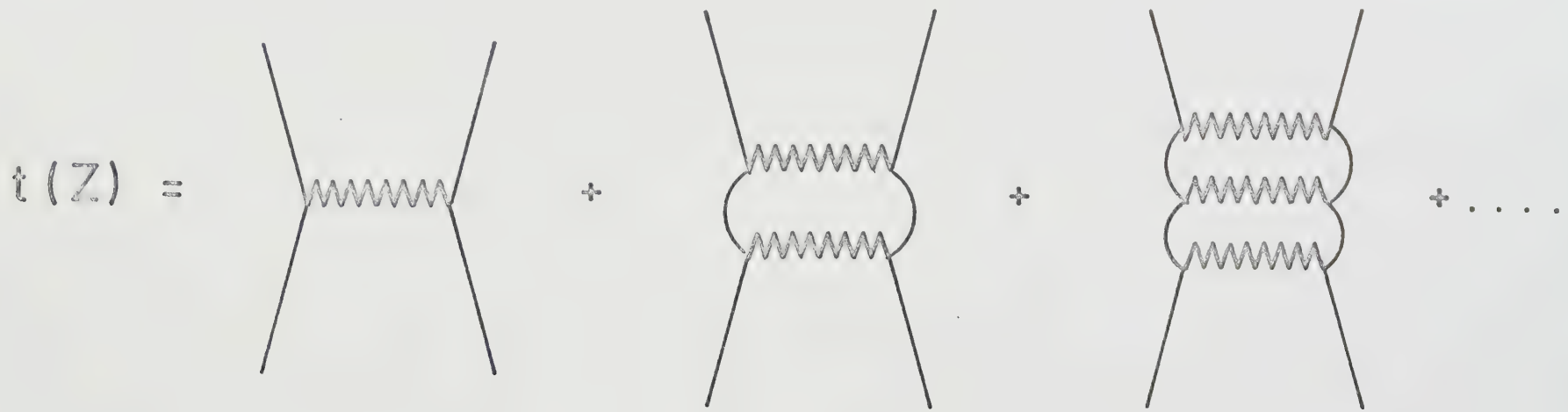


Fig. 1

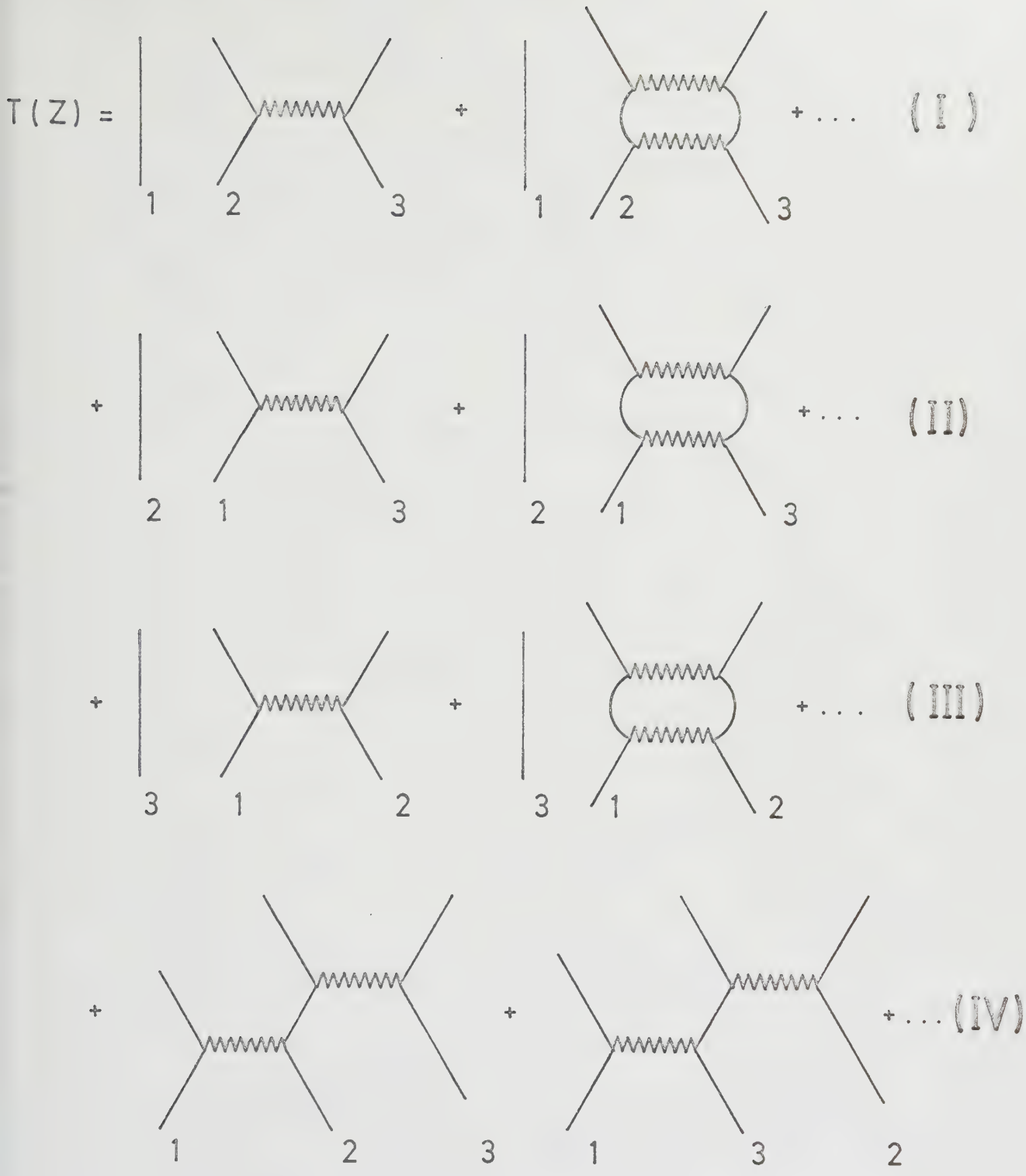


Fig. 2

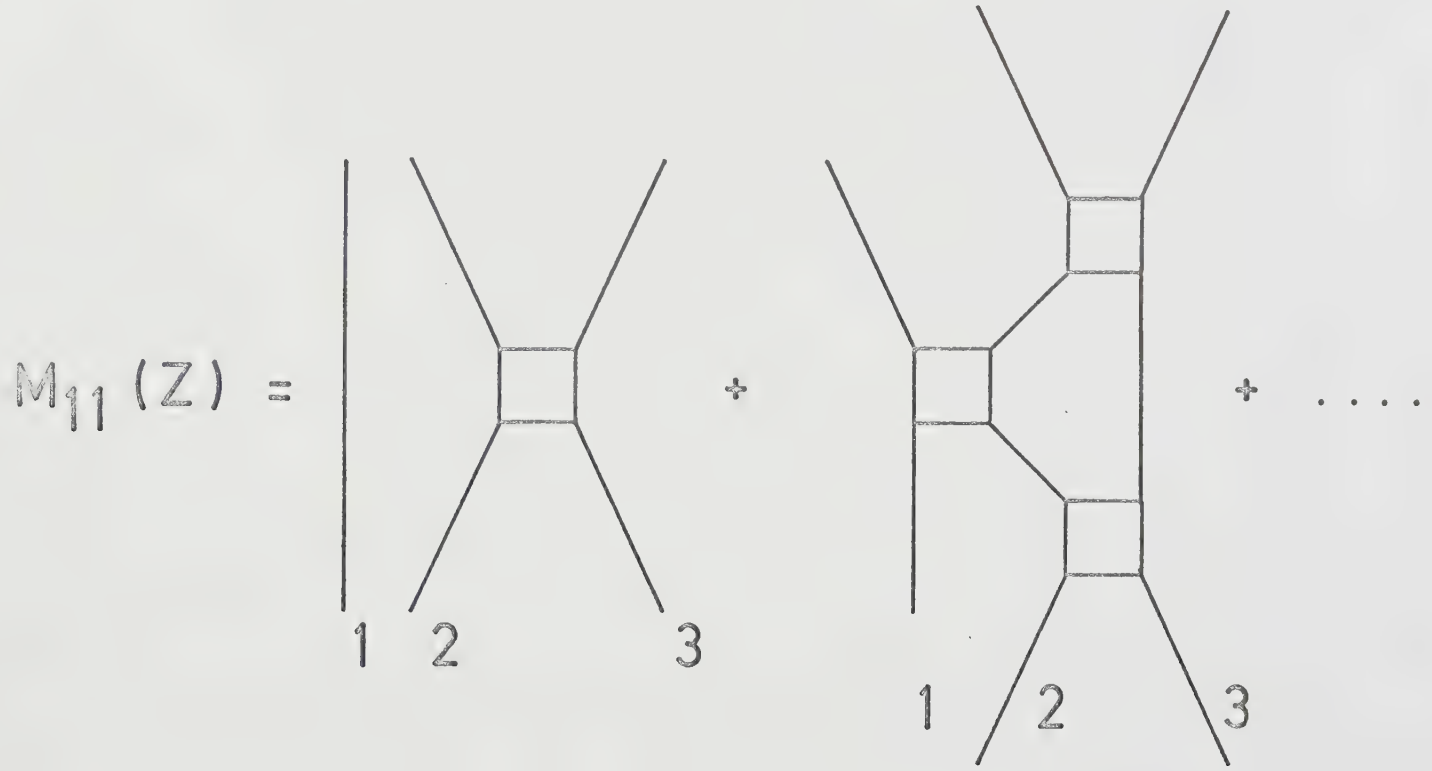
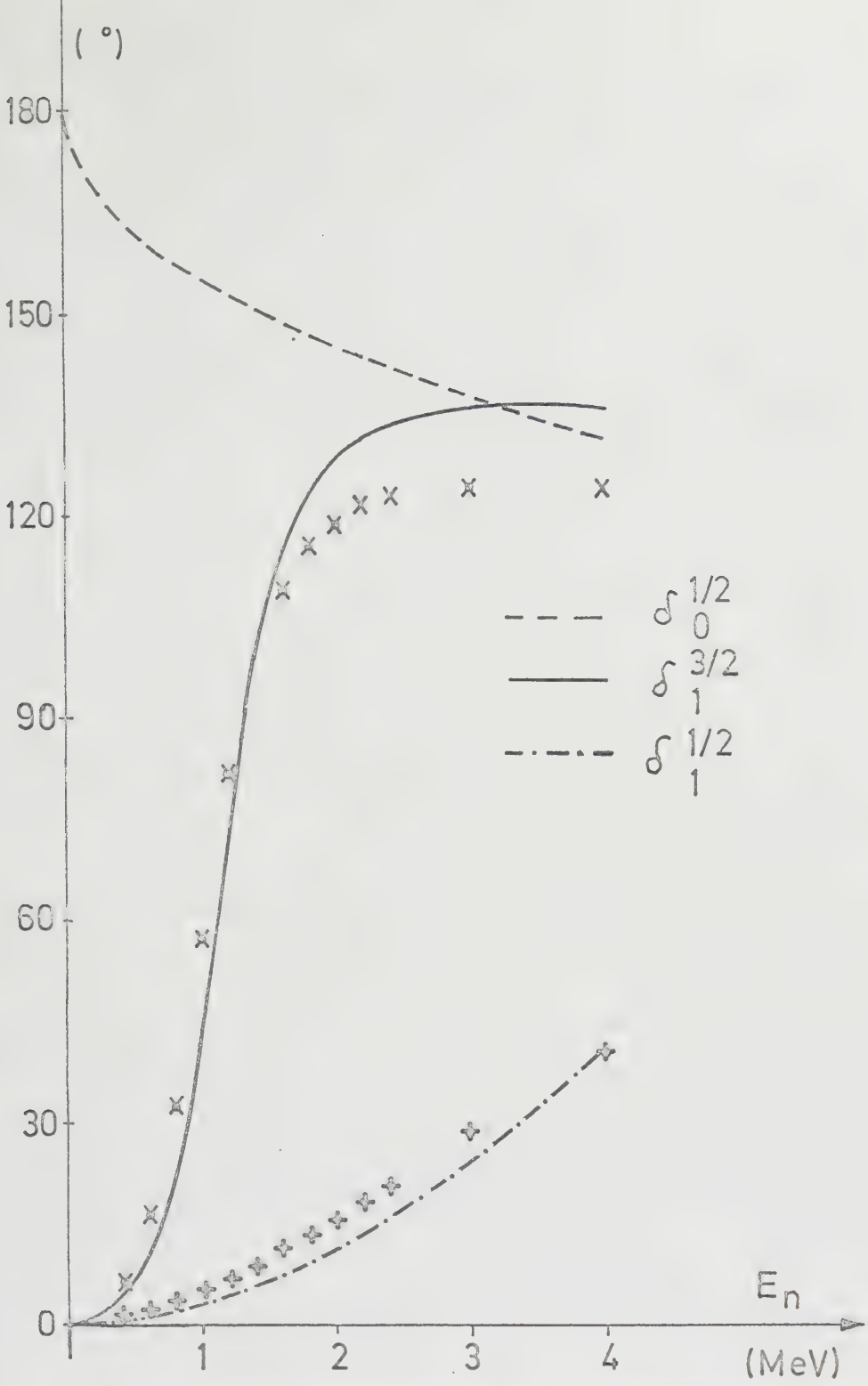
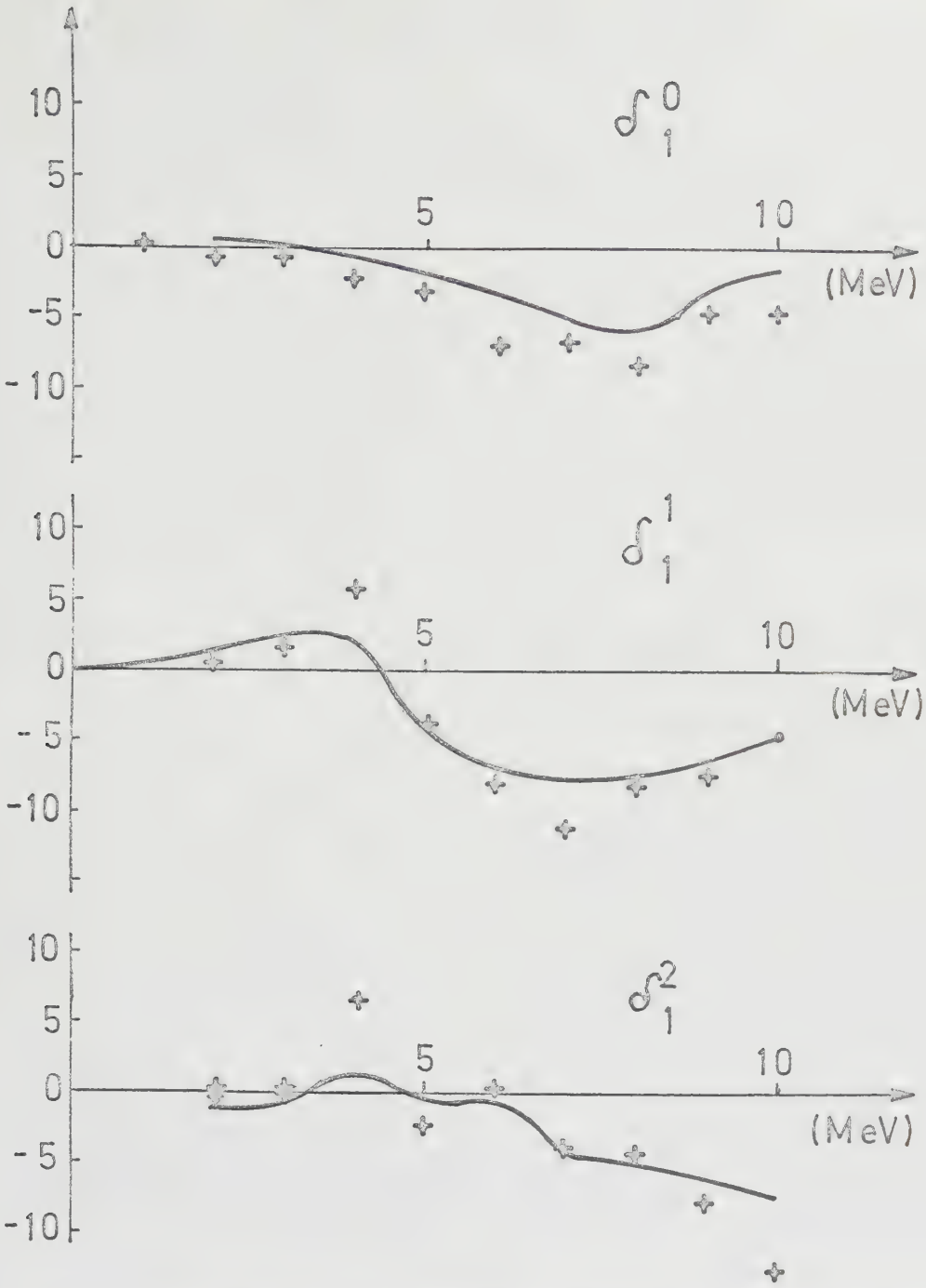


Fig. 3



Separable Approximation für Kastenpotential (—)
verglichen mit Satchler (+ ×)

Fig. 4 Neutron - Helium - Streuphasen



Berechnung mittels zweimaliger Separation
++ experimentelle Werte von Haeberli

Fig. 5 Deuteron - Helium - Streuphasen

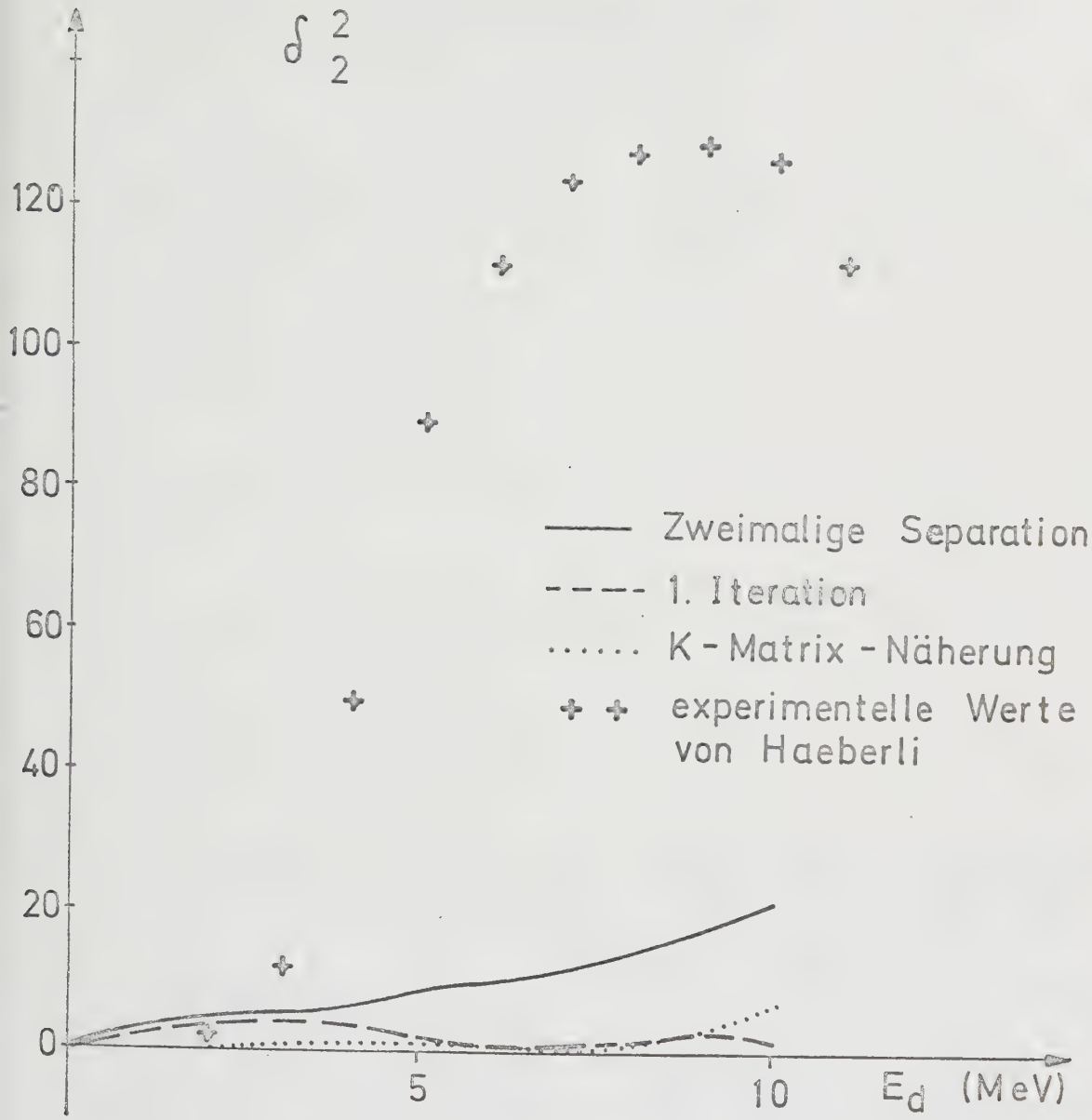


Fig. 6 Deuteron - Helium - Streuphasen
Vergleich verschiedener Approximationen

Literaturverzeichnis

1.) L. D. Faddeev; Methematical Aspects of the Three-Body Problem in the Quantum Scattering Theory, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1965

2.) C. Lovelace; Phys.Rev. 135 (1964) B 1225

3.) S. Weinberg; Phys.Rev. 133 (1964) B 232

4.) E. O. Alt, P. Grassberger and W. Sandhas; Nucl.Phys. B2 (1967) 167

5.) L. S. Rodberg and R. M. Thaler; Introduction to the Quantum Theory of Scattering, Academic Press, New York 1967

6.) S. Weinberg; Phys.Rev. 131 (1963) 440

7.) K. L. Kowalski and D. Feldman; Jour.Math.Phys. 4 (1963) 507

8.) E. Hille and R. S. Phillips; Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society, Providence 1957

9.) N. Dunford and J. T. Schwartz; Linear Operators, Interscience Publishers, New York 1964

10.) A. E. Taylor; Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York 1958

11.) R. G. Newton; Scattering Theory of Waves and Particles, McGraw-Hill, New York 1966

12.) T. Kato; Bull.Amer.Math.Soc. 70 (1951) 195

13.) M. L. Goldberger and K. M. Watson; Collision Theory, Wiley, New York 1964

14.) J. V. Noble; Phys.Rev. 157 (1967) 939

15.) A. S. Reiner; Nuov.Cim. X, 51 (1967) 1

16.) A. R. Edmonds; Drehimpulse in der Quantenmechanik BI 53 Mannheim 1964

17.) L. C. McIntyre and W. Haeberli; Nucl.Phys. A91 (1967) 369 und private Mitteilung

18.) P. E. Shanley; Phys.Rev.Lett. 21 (1968) 627

19.) M. A. Preston; Physics of the Nucleus, Addision-Wesley, Reading 1962

20.) G. R. Satchler, L. W. Owen, A. J. Elwyn, G. L. Morgan and R. L. Walter; Nucl.Phys. A 112 (1968) 1

21.) E. O. Alt, P. Grassberger and W. Sandhas; preprint, Universität Bonn 1968

22.) T. A. Osborn; preprint, Universität Oxford, Ref. 31/69, 1969

23.) R. J. Yaes; Nucl.Phys. A 131 (1969) 623

24.) W. A. Pearce, W. A. Gale and I. M. Duck; Nucl.Phys. B3 (1967) 241

25.) J. V. Noble; Phys.Rev. 161 (1967) 945

Der größte Teil der vorliegenden Arbeit wurde am Institut für Experimentalphysik durchgeführt. Für die Möglichkeit, dies an seinem Institut auszuführen, danke ich Herrn Professor Dr. R. Fleischmann vielmals.

Herrn Professor Dr. M. G. Huber danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes, Herrn Priv.-Doz. Dr. D. Fick für anregende Diskussionen und die Anregung zu dieser Arbeit.

Dem Rechenzentrum der Universität Erlangen-Nürnberg danke ich für die großzügig zur Verfügung gestellte Rechenzeit. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglichte diese Arbeit durch finanzielle Unterstützung. Diese Hilfe sei dankbar anerkannt.

Lebenslauf

artmut Hofmann

eb. am:	31. Mai 1940
n:	Nürnberg
ltern:	Oberfeldmeister Johann Hofmann und Ehefrau Betti, geb. Heberlein
amilienstand:	verheiratet seit 12. Nov. 1965
chulen:	1946 - 1950 Volksschule in Wiesentheid/Ufr. 1950 - 1956 Oberrealschule in Kitzingen 1956 - 1959 Oberrealschule in Nürnberg
tudium:	1959 - 1966 Studium der Physik an der Universität Erlangen - Nürnberg
rüfungen:	28.2.1962 Diplom-Vorprüfung in Physik 13.1.1966 Diplom-Hauptprüfung in Physik
tellungen:	1.2.1966 bis 30.6.69 wissenschaftlicher Mitarbeiter (DFG) am Physikalischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg ab 1.7.1969 Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg

rlangen, den 15.10.1969